BHS II K. 28

234 | ~~144~~

234 | 1474 | 50
~~1170~~
~~304~~
1404
70

234 | 1474 | 6
1404
70

6 | 38 | 6
36
2

Joſeph Spenglers

weiland öffentl. Lehrers der Mathematik auf der hohen Schule zu Dillingen

Erſte Gründe der Arithmetik und Algebra.

Achte um etwas vermehrte und verbeſſerte Auflage

von

Andreas Chriſtian Mayer,

Ingenieur und Weinviſierer in Augsburg.

Bayerische Berg-, Hütten- und Salzw. Aktiengesellschaft
Bibliothek
Gruppe: II H
B. Nr. 28

Augsburg,
in der Martin Veith und Michael Riegerſchen Buchhandlung.
1803.

BIBLIOTHEK DER K.B. GENERAL BERG- U. SALINEN ADMINISTR.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Inhalt
des erſten Theils der Rechenkunſt.

Erſter Abſchnitt. Von den vorzüglichen Eigenſchaften der Zahlen. §. 1. — §. 13.

Zweyter Abſchnitt. Von der Vermehrung in ungenannten Zahlen durch die Addition. §. 14. — §. 16.

Dritter Abſchnitt. Von der Vermehrung in ungenanuten Zahlen durch die Multiplication. §. 17. — §. 23.

Vierter Abſchnitt. Von der Verminderung der ungenannten Zahlen durch die Subtraction. §. 24. — §. 28.

Fünfter Abſchnitt. Von der Verminderung der ungenannten Zahlen durch die Diviſion. §. 29. — §. 33.

Sechster Abſchnitt. Von den Brüchen und Rechnungsartrn mit Brüchen. §. 34. — §. 57.

Siebenter Abſchnitt. Von den Rechnungsarten in genannten Zahlen.

I. Durch die Addition. §. 58.

II. Durch die Subtraction. §. 59.

III. Durch die Multiplication. §. 60.

IV. Durch die Diviſion. §. 61.

Achter Abſchnitt. Von den Verhältniſſen und Proportionen. §. 62. — §. 80.

Neunter Abſchnitt. Von der Regel De-Tri überhaupt. §. 81. — §. 89.

Zehnter Abſchnitt. Von der einfachen Regel De-Tri. §. 90. — §. 91.

Eilfter Abſchnitt. Von der zuſammengeſetzten Regel De-Tri. §. 92. — §. 99.

Zwölfter

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Inhalt
des erſten Theils der Rechenkunſt.

Erſter Abſchnitt. Von den vorzüglichen Eigenſchaften der Zahlen. §. 1. — §. 13.

Zweyter Abſchnitt. Von der Vermehrung in ungenannten Zahlen durch die Addition. §. 14. — §. 16.

Dritter Abſchnitt. Von der Vermehrung in ungenanuten Zahlen durch die Multiplication. §. 17. — §. 23.

Vierter Abſchnitt. Von der Verminderung der ungenannten Zahlen durch die Subtraction. §. 24. — §. 28.

Fünſter Abſchnitt. Von der Verminderung der ungenannten Zahlen durch die Diviſion. §. 29. — §. 33.

Sechster Abſchnitt. Von den Brüchen und Rechnungsartrn mit Brüchen. §. 34. — §. 57.

Siebenter Abſchnitt. Von den Rechnungsarten in genannten Zahlen.

I. Durch die Addition. §. 58.

II. Durch die Subtraction. §. 59.

III. Durch die Multiplication. §. 60.

IV. Durch die Diviſion. §. 61.

Achter Abſchnitt. Von den Verhältniſſen und Proportionen. §. 62. — §. 80.

Neunter Abſchnitt. Von der Regel De-Tri überhaupt. §. 81. — §. 89.

Zehnter Abſchnitt. Von der einfachen Regel De-Tri. §. 90. — §. 91.

Eilfter Abſchnitt. Von der zuſammengeſetzten Regel De-Tri. §. 92. — §. 99.

Zwölfter

Zwölfter Abſchnitt. Von den Quadratzahlen und Ausziehung der Quadratwurzel. §. 100. — §. 116.
Dreyzehnter Abſchnitt. Von den Cubiczahlen und Ausziehung der Cubicwurzel. §. 117. — §. 125.
Vierzehnter Abſchnitt. Von der Decimal-Rechnung. §. 126. — §. 141.

Des zweyten Theils der Algebra.

Erſter Abſchnitt. Von den Größen. §. 1.—§. 9.
Zweyter Abſchnitt. Von den vier Rechnungsarten mit ganzen Größen. §. 10. — §. 23.
Dritter Abſchnitt. Von den Brüchen. §. 24.—§. 34.
Vierter Abſchnitt. Von den Quadratzahlen, von Ausziehung der Wurzel und von den Irrational-Größen §. 35. — §. 48.
Fünfter Abſchnitt, Von den Proportionen und Progreßionen. §. 49. — §. 89.
Sechster Abſchnitt. Von den algebraiſchen Gleichungen vom erſten Grade mit einer unbekannter Größe. §. 90. — §. 103.
Siebenter Abſchnitt. Von den algebraiſchen Gleichungen vom zweyten Grade mit einer unbekannten Größe. §. 104. — §. 105.
Achter Abſchnitt. Von den algebraiſchen Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen. §. 106. — 114.
Neunter Abſchnitt. Wie die algebraiſchen Gleichungen zu finden ſind. §. 115. — §. 116.

Des

Des erſten Theiles

Erſter Abſchnitt.

Von den vorzüglichſten Eigenſchaften der Zahlen.

§. 1.

Die Rechenkunſt iſt diejenige Wiſſenſchaft, welche ſich mit der Vergleichung verſchiedener Zahlen beſchäftiget, und zugleich diejenige Reglen vorſchreibt, nach welchen man aus gegebenen bekannten Zahlen andere unbekannte Zahlen finden kann.

§. 2.

Ein gewißes Ganze, das man entweder ſelbſt, oder deſſen Theile man mehrmals zuſammenzehlt, heißt eine Einheit.

§. 3.

Eine Menge ganzer Einheiten, nennt man eine ganze Zahl: hingegen eine Menge gleichgroßer Theile der Einheiten eine gebrochene Zahl oder einen Bruch.

§. 4.

Eine abſtrakte oder ungenannte Zahl iſt diejenige Zahl, bey der die beſondere Beſchaffenheit der zuſammengezehlten Einheiten gar nicht in Betrachtung kommt; eine concrete oder genannte Zahl hingegen eine ſolche, welche eine gewiſſe Menge von Einheiten einer gewiſſen Art ausdrückt.

Zum Exempel. Die Zahl fünf überhaupt iſt eine ungenannte Zahl; hingegen fünf Pfund eine genannte Zahl.

§. 5.

Diejenigen Zeichen, welche man ſtatt der gewöhnlichen Worte gebraucht, die Zahlen dadurch auszudrücken, werden Ziffern genannt. Dieſe Zeichen der Zahlen ſind folgende:

1.	2.	3.	4.	5.	6.
Eins.	Zwey.	Drey.	Vier.	Fünf.	Sechs.
7.	8.	9.	0.		
Sieben.	Acht.	Neun.	Null.		

§. 6.

§. 6.

Die Null an und vor ſich, oder wenn dieſelbe allein ſteht, bedeutet gar nichts, und wird nur gebraucht, um eine leere Stelle auszufüllen, in welcher keine andere Ziffer ſteht, damit man daraus die Stellen der übrigen Ziffern, in einer Reihe erkennen, und darnach ihre Bedeutungen beſtimmen könne.

§. 7.

Die Regel, wie man durch die geſchriebene Ziffern ſich ausdrücket, was man bey den Worten beobachtet, iſt folgende:

Man ſchreibe die Ziffern von der rechten Hand gegen die linke Hand, und laſſe jede Ziffer in der nächſt folgenden Stelle zehnmal mehr bedeuten, als in der nächſt vorhergehenden. In die Stellen, welche ledig bleiben müſſen, ſetze man die ſogenannte Null.

Das nachſtehende Exempel wird dieſe Regel gleichſam handgreiflich erklären, und auseinanderſetzen.

Zum Exempel.

in der erſten Stelle — eins — — — — 1.
— — zweyten — — zehen — — — — 10.
— — dritten — — hundert — — — 100.
— — vierten — — tauſend — — — 1000.
— — fünften — — zehendtauſend — — — 10000.
— — ſechsten — — hunderttauſend — — — 100000.
— — ſiebenten — — eine Million — — 1000000.
— — achten — — zehen Millionen — — 10000000.
— — neunten — — hundert Millionen — 100000000.
— — zehnten — — tauſend Millionen — 1000000000.
— — eilften — — zehntauſend Millionen — 10000000000.
— — zwölften — — hunderttauſend Millionen 100000000000.
— — dreyzehnten — eine Billion. 1000000000000.

§. 8.

Unter dem Worte Numeriren verſteht man nichts anders, als eine in Ziffern geſchrie-
bene

bene Zahl mit Worten ausſprechen, oder eine ausgeſprochene Zahl mit geſchriebenen Ziffern anzeigen.

§. 9.

Eine jede Zahl, die mit Ziffern geſchrieben wird, mit Worten auszuſprechen.

Auflöſung.

Iſt die geſchriebe Zahl ſehr groß, ſo theile man

1) die Ziffern von der rechten Hand gegen die linke in Claſſen, und gebe jeder Claſſe ſechs Ziffer, da es denn gleich viel iſt, wie viel Ziffern die letzte Claſſe zur linken Hand bekommt.

2) oberwärts an der ſiebenten Ziffer ſetze man einen Strich (′) an der dreyzehnten zwey Strich (″) an der neunzehnten drey Strich (‴) an der fünf und zwanzigſten vier Strich (⁗) u. ſ. w.

3) ſpreche man, wo ein Strich ſteht für Millionen, wo zwey Strich ſtehen für Billionen, drey Strich für Trillionen, vier Strich für Quadrillionen u. ſ. w. aus, und alle übrige gegen die rechte Hand zu liegende Ziffer nach der im §. 7. vorgeſchriebenen Regel aus.

Zum Exempel.

3‴405621″543021′230567.

dieſe Zahl muß demnach alſo ausgeſprochen werden:

Drey Trillionen, viermalhundert fünftauſend ſechshundert ein und zwanzig Billionen, fünfmalhundert drey und vierzigtauſend ein und zwanzig Millionen, zweymal hundert dreyßigtauſend fünfhundert ſieben und ſechszig.

§. 10.

Eine Zahl, die mit Worten ausgeſprochen worden iſt, mit Ziffern gehörig zu ſchreiben.

Aufloͤſung. Man habe ausgeſprochen:

Dreymalhundert acht und fünfzig Billionen, viermal hundert ein und zwanzigtauſend neunhundert ſieben und ſechszig Millionen, fünfmalhundert acht und vierzigtauſend dreyhundert ein und zwanzig, ſo mache man

1) auf dem Papier ſo viele Abtheilungen durch Striche, zwiſchen welche man je ſechs Ziffer in einer Reihe ſchreiben koͤnne, als die ausgeſprochene Zahl erfordert; naͤmlich, wenn dieſelbe nur Millionen enthaͤlt einen Strich; enthaͤlt dieſelbe aber Billionen zwey Strich, wie im vorgegebenen Fall u. ſ. w.

2) ſchrei-

2) ſchreibe man jede ausgeſprochene Zahl in die gehörige Stelle von der linken gegen die rechte Hand; die leer gebliebenen Stellen aber fülle man mit Nullen aus:

„ als ,

358|42187|548321.

§. 11.

Die vorzüglichſten Hauptveränderungen, welche mit den Zahlen vorgenommen werden können, es mögen dieſelbe ganze Zahlen oder Brüche ſeyn, beſtehen darinn, daß ſie ſich vermehren oder vermindern laſſen.

§. 12.

Die Vermehrung einer Zahl kann geſchehen.

1) durch die Addition, wenn zu einer Zahl eine andere gegebene hinzugethan oder geſetzt wird; oder

2) durch die Multiplication, wenn eine Zahl ſo vielmal genommen werden ſoll, als eine andere gegebene Zahl Einheiten enthält.

§. 13.

Die Verminderung einer Zahl kann geſchehen

1) durch die Subtraction, wenn von einer Zahl eine kleinere weggenommen wird; oder

2) durch die Diviſion, wenn von einer Zahl eine andere ſo vielmal als möglich abge-

zogen, und dadurch gefunden wird, wie vielmal ſie in der erſtern enthalten ſey.

Anmerkung.

Zu Abkürzung der arithmetiſchen Arbeiten hat man folgende Zeichen eingeführt; als

Das Zeichen der Addition + welches plus oder mehr

— — der Subtraction — welches minus oder weniger ausgeſprochen wird,

— — der Multiplication ein Punkt . oder auch ein liegendes Andreaskreuz als ×,

— — der Diviſion; zwey übereinander ſtehende Punkte, als :

— — der Gleichheit =

um anzuzeigen, daß eine Zahl größer ſey, als eine andere ſey, ſo bedient man ſich eines lateiniſchliegenden V. deſſen Oeffnung gegen die linke Hand als > die größere Zahl hinzegen deſſen Spitze gegen die rechte Hand die kleinere Zahl andeutet.

Zweyter Abſchnitt.

Von der Vermehrung in ungenannten Zahlen durch die Addition.

§. 14.

Addiren heißt nichts anders, als zu einer gegebenen Zahl andere Zahlen hinzuthun. Diejenigen Zahlen, welche addirt werden ſollen, nennt man die Poſten, die geſuchte Zahl aber

aber, welche den Poſten zuſammen genommen gleich iſt, die Summe.

§. 15.

Bey der Addition ſind folgende Regeln zu beobachten, als:

1) ſetze man die gegebenen Poſten ſo untereinander, daß die Ziffern von einerley Ordnung, nämlich die Einheiten unter die Einheiten, die Zehner unter Zehner, Hundert unter Hunderte u. ſ. w. gerade untereinander zu ſtehen kommen; und ziehe unter ſolche einen Querſtrich.

2) zähle man die Ziffern, ſo untereinander ſtehen, und zwar zuerſt die Einer oder Einheiten, hernach die Zehner, alsdenn die Hunderte u. ſ. w. zuſammen; und die Summe ſetze man unter den Strich.

3) addire man die Zehner, welche aus den zuſammengezählten Einheiten entſtehen, ſogleich zu den gegebenen Zehnern, ebenſo die Hunderte, welche aus den zuſammengezählten Zehnern entſtehen, ſogleich zu den gegebenen Hunderten, u. ſ. w. Die auf dieſe Art gefundene einzelne Summen zuſammen genommen, geben die geſuchte Summe aller gegebenen Poſten.

Zum Exempel.

Es ſeyen folgende drey Zahlen, als 897 789 und 977 gegeben: man ſoll die Summe dieſer drey Zahlen finden.

Sub Nro. 1. Nach der Regel ſetze man die gegebenen Zahlen untereinander, wie folgt: als

897
789
977
23
24
24
2663 Summe.

alsdenn zähle man nach Nro. 2, die Ziffern, ſo untereinander ſtehen, zuſammen; ſo iſt die Summe der erſten Reihe oder Einer gegen der rechten Hand — — 23
der zweiten oder der Zehner — — 24
der dritten oder Hunderte — — 24
addirt man nun dieſe drey Summe zuſammen, ſo kommt für die gegebenen drey Zahlen die Summe 2663 heraus.

§. 16.

Dieſe Rechnung, welche bey großen Exempeln erſtaunend weitläuftig werden, und auch vieles Papier koſten würde, hat man in der Praxin Unbequemlichkeit halber zu verkürzen geſucht: und wird obiges Exempel nach folgender Regel gerechnet, als:

1) wenn in der Reihe der Einer oder Einheiten die Summe die Ziffer von 9. überſteigt, und folglich aus zweyen Ziffern beſteht: ſo ſetze man blos die hintere Ziffer unter die erſte Reihe, und behalte

2) die

2) die vordere im Sinn, oder in mente, und addire dieſelbe zu den Zehnern. Beſteht

3) die Summe der Reihe von Zehner ebenfalls aus mehr als einer Ziffer, ſo wird die erſtere zu der Reihe der Hunderte addirt, und die hintere wird unter die Reihe der Zehner geſetzt:

$$\begin{array}{r} 897 \\ 789 \\ \underline{977} \\ 2663 \end{array}$$

Dieſe Summe wird auf folgende Art gefunden: als 7 und 9 iſt 16 und 7 iſt 23, von dieſer Ziffer wird die 3 als ein Einer oder Einheit unter den Strich in die Stelle der Einer geſetzt, die Ziffer 2 aber wird im Sinne oder in mente behalten, und zu der Ordnung der Zehner addirt, indem man ſagt 2 und 7 iſt 9 und 8 iſt 17, und 9 iſt 26, davon wird 6 neben die Ziffer 3 geſchrieben, und 2 zu der Ordnung der Hunderte addirt. Man hätte im eigentlichſten Verſtand ausſprechen ſollen 20 und 70 iſt 90 und 80 iſt 170, und 90 iſt 260. Weil aber 6 in die Stelle der Zehner geſchrieben worden, wo ſie 60. andeutet, ſo wäre es überflüßig, die Zehner als Zehner zu benennen. Eben ſo wird die in mente oder im Sinn behaltene Ziffer 2 zu der Reihe der Hunderte addirt: und man ſagt, 2 und 9 iſt 11 und 7 iſt 18, und 8 iſt 26 dieſe Ziffer ſetzt man neben die zwey

vorher-

vorhergehenden, ſo wird alſo die Summe ſeyn 2663, und ausgeſprochen, zweytauſend ſechs hundert drey und ſechszig.

Exempel zur Uebung.

4736	18534	70085
8975	2619	3608
3897	1487	5307
9539	367	80
27147	23007	235
		79315

Dritter Abſchnitt.

Von der Vermehrung in ungenannten Zahlen durch die Multiplikation.

§. 17.

Multipliciren, heißt nichts anders, als eine gegebene Zahl etlichemal zu ſich ſelbſt addiren, oder eine gegebene Zahl ſo oft zuſammenzehlen, als eine andere gegebene Zahl Einheiten enthält.

§. 18.

Diejenige Zahl, mit welcher die Vermehrung vorgenommen wird, oder welche multiplicirt werden ſoll, wird Multiplicandus, die Zahl aber, welche anzeigt, wie oft eine gegebene Zahl multiplicirt werden ſoll, der Mul-

tiplicator; diejenige Zahl hingegen, welches heraus kommet, wenn die Multiplication verrichtet worden iſt, das Produkt genannt.

Anmerkung.

Die beyden Zahlen, mit welchen die Multiplikation vorgenommen wird, haben außer ihren beſondern Namen auch noch einen gemeinſchaftlichen Namen; und werden Factores genannt.

§. 19.

Alle Produkte zu finden, die heraus kommen, wenn man zwo Zahlen, deren jede mit einer Ziffer geſchrieben wird, durcheinander multiplicirt, oder das ſogenannte Einmal = Eins zu verfertigen.

Aufiöſung. Man zeichne ſich

1) ein Viereck, das heißt, eine Figur, deren vier Seiten gleich lang ſind.

2) eine jede von dieſen Seiten theile man in 9 gleich große Theile, und ziehe durch dieſe Theilungspunkte gerade Linien.

3) in die oberſte 9 Fächer, wie auch in die 9 erſte Fächer zur linken Hand ſchreibe man die Ziffern von 1 bis 9 in ihrer natürlichen Ordnung.

4) addire man jede ſolcher Ziffern zu ſich ſelbſt, ſo hat man ihr Doppeltes, und zu ihrem Doppelten, ſo hat man ihr Dreyfaches,

und

und zu ihrem Dreyfachen, ſo hat man ihr Vierfaches u. ſ. w. welches man bis auf das Neunfache fortſetzen kann, ſo iſt das Einmal-Eins fertig.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 20.

Eine zuſammengeſetzte Ziffer mit einer einfachen zu multipliciren.

Auflöſung.

1) Man ſetze den Multiplicator unter die Einheiten des Multiplicandus; darauf ziehe man einen Querſtrich darunter.

2) multiplicire man die Einheiten des Multiplicandus durch den Multiplicator. Kommt aber in einem Produkt eine Ziffer einer höhern Ordnung vor, das heißt, überſteigt das Produkt die Ziffer 9, und müßte folglich daſſelbe mit zweyen Ziffern geſchrieben werden, ſo ſchreibe man

3) nur

3) nur die hintere Ziffer gegen der rechten Hand in die Reihe der Einheiten, die erſtere Ziffer hinzegen, gegen die linke Hand zu, behalte man im Sinn oder in mente, und wenn man

4) die Zehner des Multiplicandus durch den Multiplicator multiplicirt hat, ſo addire man die im Sinn behaltene Ziffer des vorigen Produkts dazu. Eben ſo verfährt man auch, wenn das neue Produkt der Zehner die Ziffer 9 überſteigt, bey der folgenden Ordnung der Hunderte, Tauſende u. ſ. w.

Zum Exempel.

Es ſey der gegebene Multiplicandus 352, und der Multiplicator 3

$$\begin{array}{r} 352 \\ 3 \\ \hline 1056 \end{array}$$

das unter dem Strich geſetzte Produkt iſt hier alſo gefunden worden: 3 mal 2 iſt 6, alsdenn 3 mal 5 iſt 15, von dieſem Produkt wird die 5 in die Stelle der Zehner geſetzt, die 1 aber im Gedächtniß oder im Sinne behalten. Hierauf ſagt man 3 mal 3 iſt 9, wozu die im Sinne behaltene 1 addirt wird, iſt 10, welche Zahl, weil keine höhere Ziffer im Multiplicandus mehr übrig iſt, ganz hingeſchrieben wird.

Exem=

Exempel zur Uebung.

84325	56214	378954
7	8	9
590275	449712	3410586.

§. 21.

Zwey Zahlen ineinander zu multipliciren, wenn beyde durch zuſammengeſetzte Ziffern ausgedrückt ſind.

Auflöſung. Man ſuche

1) das Produkt aus der Ziffer der niedrigſten Ordnung des Multiplicators in den ganzen Multiplicandus, und ſchreibe ſolches nach dem vorigen §. unter den Querſtrich.

2) ſchreibe man das Produkt aus der Ziffer der nächſt höhern Ordnung des Multiplicators in den ganzen Multiplicandus unter das erſte Produkt ſo, daß die niedrigſte Ziffer dieſes Produkts gerade unter die andere Ziffer des Multiplicators, daraus es entſtanden iſt, komme; und eben ſo verfahre man mit den Produkten aus den Ziffern der folgenden höhern Ordnung. Endlich

3) addire man alle die gefundenen Produkte, ſo giebt die Summe das geſuchte ganze Produkt.

Zum Exempel.

```
   5821
    235
-------
  29105
 17463
11642
-------
1367935
```

Das unter den untern Strich geſetzte Produkt iſt alſo gefunden worden. Das Produkt aus 5 in den Multiplicandus 5821 iſt 29105, welches zuerſt unter den obern Strich geſchrieben worden. Das Produkt aus 3 in den Multiplicandus iſt 17463, welches ebenfalls unter den Strich geſchrieben worden, aber ſo, daß die 3 als die niedrigſte Ziffer unter den Zehner des Multiplicators 3 gekommen, weil man eigentlich, ſtatt 3 mal 1 iſt 3, hätte ſagen ſollen 30 mal 1 iſt 30, daher die Stelle der Einer leer bleiben müſſen. Eben ſo iſt das Produkt aus der 2 in den Multiplicandus nämlich 11642 ſo geſchrieben worden, daß die 2 unter die 6 in die Stelle der Hunderte gekommen, weil man eigentlich hätte ſagen ſollen 200 mal 1 iſt 200 u. ſ. w. Die Summe aus dieſen dreyen einzelnen Produkten aber, nämlich 1367935 iſt das geſuchte ganze Produkt.

Exempel zur Uebung.

75384	12345
987	6789
527688	111105
603072	98760
678456	86415
74404008	74070
	83810205

§. 22.

Wenn einer von den beyden Factoren, oder auch beyde hinter ſich Nullen haben, ſo wird die Multiplication folgendermaßen verrichtet.

Auflöſung.

Hat nur einer von den Factoren, eine oder mehrere Nullen hinter ſich. ſo multiplicire man

1) die ganze Zahlen in einander nach den §. 19. und 20. und zu dem Produkt ſetze man ſo viel Nullen als der eine von den Factoren Nullen hät.

2) Haben aber beyde Factoren hinter ſich eine oder mehrere Nullen, ſo addire man

3) wenn man vorhero das Produkt von den ganzen Zahlen gefunden, ſo viel Nullen zu dem gefundenen Produkt, als die beyde Factoren Nullen haben, ſo iſt dieſer Aufgabe ein Genüge geſchehen.

Zum Exempel.

57300	5367
22	35000
1146	26835
1146	16101
1260600	187845000

§. 23.

Es kann auch öfters der Fall eintretten, daß entweder eine oder auch mehrere Nullen zwiſchen dem Multiplicator ſtehen; und die Multiplication wird alsdenn mit den Zahlen vorgenommen, wie gewöhnlich. Trift es ſich, daß eine Nulle an der Stelle der Zehner ſteht, ſo multiplicire man, wenn man mit den Einern den Multiplicandus multiplicirt hat, mit den Hunderten, und rücke von den Einern um zwey Nullen hinein. Befinden ſich aber nicht nur in der Stelle der Zehner, ſondern auch noch in der Hunderten Nullen, ſo multiplicire man zuerſt mit den Einern, alsdenn mit den Tauſenden, und ſetze das neue Produkt der Tauſenden um drey Stellen weiter von den Einern des erſten Produkts zurück. u. ſ. w.

Exempel.

703	2346001.
301.	5002.
703	4692002
2109.	11730005..
211603	11734697002.

Vierter Abſchnitt.

Von der Verminderung in ungenannten Zahlen durch die Subtraction.

§. 24.

Subtrahiren heißt, von einer Zahl eine andere gegebene Zahl einmal wegnehmen. Von den beyden gegebenen Zahlen heißt diejenige, von der die Subtraction geſchehen ſoll, oder von welcher man abziehen ſoll, die größere Zahl, hingegen die andere, mit welcher die Subtraction verrichtet wird, oder welche von der größern abgezogen werden ſoll, die kleinere Zahl, und endlich diejenige Zahl, welche übrig bleibt, nennt man den Reſt, die Differenz, oder auch den Unterſchied.

§. 25.

Es ſind zwey ungleiche Zahlen gegeben, man ſoll die kleinere von der größern abziehen.

Auflöſung. Man ſchreibe

1) die kleinere Zahl unter die größere, ſo, daß die Einer der einen unter die Einer der andern, Zehner unter Zehner, Hunderte

unter Hunderte u. ſ. w. wie bey der Addition gelehrt worden, zu ſtehen kommen. Iſt

2) in der kleinern Zahl jede einfache Ziffer kleiner, als die ober ihr ſtehende: ſo zehle man in Gedanken die kleinere von der größern zurück. und ſetze, was übrig bleibt, unter den unter die beyden Zahlen gemachten Querſtrich: als

	789
	323
Reſt	466

dieſes wird ausgeſprochen; nachdem man bey der rechten Hand anfangt, 3 von 9 bleibt 6: dieſe 6 ſchreibe man unter die Einer unter den Querſtrich; alsdenn ziehe man die Zehner ab, und ſage 2 von 8 bleibt 6, und ſchreibe dieſe 6 in die Reihe der Zehner. Endlich ſage man 3 von 7 bleibt 4 und hat man dieſe 4 in die Reihe der Hunderte geſchrieben, ſo hat man 466 als den geſuchten Reſt.

Exempel zur Uebung.

	56078		1789
	1003		1487
Reſt	55075	Reſt	302

§. 26.

Auf den Fall, der nur gar zu oft ſich ereignet, daß einige unter den Ziffern der kleineren Zahl größer, als die darüber ſtehende

der größern Zahl ſind, ſo geſchiehet die Subtraktion nach folgender Regel:

Es iſt iu den erſten Abſchnitt §. 7. deutlich erklärt worden; daß, wenn eine Reihe Ziffern neben einander ſtehen, diejenigen Ziffer von der rechten gegen die linke Hand immer zehnmal mehr bedeute, als in der nächſt vorhergehenden Stelle; hieraus entſteht folgende Regel;

Wenn die obere Zahl kleiner als die untere iſt, ſo nehme man von der nächſtfolgenden zehen hinweg, und addire hiezu diejenige Zahl von der die Subtraction geſchehen ſoll.

Zum Exempel.

Man ſoll 38 von 64 abziehen.

Nachdem man die Zahlen gehörigermaßen geſchrieben,

$$\begin{array}{r} \dot{6}4 \\ 38 \\ \hline 26 \end{array} \text{ Reſt}$$

ſo ſage man 8 von 4 kann nicht abgezogen werden, um aber doch die Subtraction nach Verlangen bewerkſtelligen zu können, ſo nehme man von der nächſtfolgenden 6, eins hinweg; und oberhalb der Ziffer 6 mache man einen Punkt als 6˙ und weil dieſe 1 in Anſehung der Einer zehnmal mehr bedeutet, ſo addire

addire man hiezu 4 und ſage alsdenn 8 von 14 bleiben 6, dieſe 6 ſchreibe man unter die Einer, und ſpreche man weiter 3 von 5, denn weil man von 6 Eins entlehnt oder geborgt hat, ſo iſt dieſe Ziffer um eins weniger, bleiben 2, dieſe 2 ſchreibe man neben die vorhergefundene Ziffer 6, ſo iſt 26 der ganze geſuchte Reſt.

Exempel zur Uebung.

	• • • •		• • • • • •
	73421		8956781
	26738		7968995
Reſt	46683	Reſt -	987786

§. 27.

Es kann auch bey dem ſogenannten Borgen geſchehen, daß die Ziffer, wovon man 1 borgen ſoll, ein Null iſt, und läßt ſich davon nichts abnehmen. Folgt auf die Null eine Ziffer, ſo verfahre man nach dem vorhergehenden §. hievon entlehnt man 1, ſo hat man 10 ſtatt der 0. Von dieſer Claſſe kann man zur folgenden Claſſe wieder 1 borgen, ſo bleiben 9, wie folgende Exempel es deutlich zeigen:

• • • • •	• • • • • •
10 10	10 10
730504	5082104
364738	1895676
365766	3186428

Hieraus ergiebt ſich folgende Regel:

Wenn man über eine 0 weg borget, ſo iſt es eben ſo viel, als wenn man die 0 in 9 verwandelt hätte.

§. 28.

Wenn mehrere Nullen nach einander folgen, ſo muß man von derjenigen Ziffer, die nach der letzten Null folgt, 1 borgen, ſo bekommt man 10 ſtatt dieſer 0; von dieſen 10 borgt man wieder 1 weg in die nächſt niedrige Claſſe, ſo wird dieſe 0 wieder 10, und in jener bleiben 9 u. ſ. w. Hieraus folgt denn die Regel:

Wenn man über mehrere nacheinander folgende Nullen wegborget, ſo iſt es eben ſo viel, als ob man jede dieſer Nullen in 9 verwandelt hätte.

Zum Exempel.

30076004	800005002
18598375	687359768
11477629	112645234

Anmerkung.

Um ſich zu überzeugen, daß man die Rechnung richtig gerechnet habe, ſo addire man den Reſt zu der kleinern gegebenen Zahl; ſo

muß

muß die Summa der größern gegebenen Zahl gleich ſeyn.

Fünfter Abſchnitt.

Von der Verminderung in ungenannten Zahlen durch die Diviſion.

§. 29.

Dividiren heißt von einer gegebenen Zahl eine andere gegebene ſo vielmal wegnehmen, oder abziehen, als angeht. Diejenige Zahl aber, von welcher eine andere auf dieſe Weiſe abgezogen werden ſoll, wird der Dividendus, diejenige Zahl aber, welche abgezogen werden ſoll, der Diviſor, und die geſuchte Zahl, welche angiebt, wie oftmals die Subtraction vorgenommen worden iſt, oder wie vielmal der Diviſor in dem Dividendus enthalten iſt, wird der Quotus oder Quotient genannt.

§. 30.

Eine Zahl durch eine andere zu dividiren.

Aufloſung.

Beſtehet der Diviſor nur aus einer Ziffer, ſo ſuche man

1) wie vielmal der Diviſor in der erſten, oder wenn dieſe kleiner iſt, in den beyden erſten

ſten Ziffern des Dividendus von der linken zur rechten Hand enthalten iſt; das heißt; man ſuche oder ſchlage im Einmal-Eins eine Zahl auf, welche mit dem Diviſor multiplicirt, ein Produkt giebt, welches ſo groß, oder nächſt kleiner iſt, als die erſte, oder die beyden erſten Ziffern des Dividendus.

2) Dieſe Zahl ſchreibe man als den erſten Theil des Quotienten hinter einen Strich neben den Dividendus, das Produkt hingegen unter die erſte, oder die erſten beyden Ziffern des Dividendus.

3) Ziehe man das Produkt von dem Dividendus ab. Hierauf ſchreibe man

4) die Ziffer der nächſt niedrigern Ordnung im Dividendus neben den Reſt, wenn einer vorhanden iſt, oder, (wie man zu ſprechen pflegt,) man hole die Ziffer der nächſtniedern Ordnung herunter. Alsdenn ſuche man

5) wie vielmal der Diviſor in dieſer Zahl enthalten ſey; ſchreibe man

6) den neuen Quotienten neben den vorigen Quotienten, und das Produkt ſetze man

7) unter die neue Zahl, und ziehe ſolches davon ab. u. ſ. w.

Alle einzelne Theile des Quotienten hinter dem Strich zuſammen genommen geben den geſuchten Quotienten.

Zum

Zum Exempel.

```
2 | 784 | 392
    6
   ---
    18
    18
   ---
     04
      4
     ---
      0
```

Der Quotient 392 zeigt an, daß die 2 in 784 dreyhundert zwey und neunzigmal enthalten ſey, und ſolches auf folgende Art gefunden worden iſt. Denn nach dem Einmal-Eins iſt 2 mal 3 ſechs, welches nächſt kleiner iſt als 7. Dieſe 3 iſt der erſte Theil des Quotienten hinter dem Strich, das Produkt 6 aus der 2 in den Diviſor aber unter 7 geſchrieben, und von derſelben ſubtrahirt worden. Neben den Reſt 1 ſetze man die folgenden Ziffer des Dividendus nemlich 8, welche mit dem Reſt 1 zuſammen 18 ausmacht. In dieſer 18 iſt der Diviſor 9 mal enthalten, denn 2 mal 9 iſt 18 folglich iſt 9 hinter den Strich neben die 3, das Produkt 18 aber unter die 18 zu ſetzen. Weil nun kein Reſt bleibet, ſo hole man die 4 herunter, in welcher der Diviſor 2 mal enthalten iſt, folglich ſchreibe man 2 hinter den Strich, und das Produkt aus 2 in den Diviſor nämlich 4 unter die Zahl 4 und ſubtrahire ſelbi-

ge-

ge. Da nun nichts übrig bleibt, ſo iſt folglich der ganze Quotient 392.

Exempel zur Uebung.

3	141	47	3	1521	507
	12			15	
	21			021	
	21			21	
	0			0	

§. 31.

Eine Zahl durch eine andere zu dividiren, wenn der Diviſor aus zweyen oder mehrern Zahlen beſteht.

Auflöſung.

1) Suche man wie vielmal die erſte Ziffer des Diviſors zur linken in der erſten oder den beyden erſten Ziffern des Dividendus enthalten ſey.

2) Nehme man an, weil dieſe erſte Ziffer des Diviſors die größte in derſelben iſt, daß der ganze Diviſor eben ſo vielmal in den erſten Ziffern des Dividendus enthalten ſey, man ſchreibe dahero ſolche gefundene Zahl hinter den Strich.

3) Multiplicire man dieſen gefundenen erſten Theil des Quotienten mit dem ganzen Diviſor,

4) das

4) das Produkt ſubtrahire man von den erſten Ziffern des Dividendus.

5) Neben den Reſt ſchreibe man die nächſt folgende Zahl des Dividendus, und verfahre eben ſo wie bey Nro. 1. 2. 3. und 4. gelehrt worden.

Zum Exempel.

```
24 | 834432 | 34768
     72
     ---
     114
      96
     ---
      184
      168
     ---
       163
       144
       ---
        192
        192
        ---
        000
```

Der Quotient 34768 wird auf folgende Art gefunden, nämlich 2 als die erſte Ziffer des Diviſors iſt in 8 dreymal enthalten, folglich iſt 3 hinter den Strich, und das Produkt aus 3 in 24 nämlich 72 unter die beyden erſten Ziffern des Dividendus nämlich 83 geſchrieben und ſubtrahirt worden. Neben dem Reſt iſt die folgende Ziffer des Dividendus, nämlich 4 geſetzt worden. Weil

nun

nun 2 in 11 viermal enthalten, ſo iſt 4 der zweyte Theil des Quotienten; das Produkt aus 4 in 24 nämlich 96 iſt alsdenn ſubtrahirt worden u. ſ. w.

Exempel zur Uebung.

37 | 694120 | 18760
37
324
296
281
259
222
222
..00

287 | 354158 | 1234
287
671
574
975
861
1148
1148
0000

```
584 | 294608173 | 504466
      2920
      ----
       2608
       2336
       ----
        2721
        2336
        ----
         3857
         3504
         ----
          3533
          3504
          ----
            00(29)
```

Anmerkung.

Wenn der Diviſor in den Dividendus nicht gänzlich aufgehet, ſo ſchließe man den Reſt in Clammern ein; wie bey vorſtehendem Exempel erſichtlich iſt.

§. 32.

Haben ſowohl der Dividendus als auch der Diviſor am Ende Nullen, ſo geſchiehet die Diviſion mit den ganzen Ziffern, wie in den beyden vorhergehenden Paragraphen gezeigt worden iſt, und die Nullen ſowohl im Dividendus als im Diviſor, wenn dieſelben gleich viel Nullen haben, werden am Ende weggeſtrichen. Sind aber nur im Diviſor

eine

eine oder mehrere Nullen befindlich, ſo ſtreicht man im Dividendus ſo viel Zahlen weg, als der Diviſor Nullen enthält; auch in beyden Fällen ſetzt man die weggeſtrichene Nullen oder ausgelaſſene Ziffern des Dividendus mit zu dem Reſt.

Zum Exempel.

$4\not{0} \mid 736\not{0} \mid 184$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 33 \\ 32 \\ \hline 16 \end{array}$$

$5\not{0}\not{0} \mid 85\not{0}\not{0} \mid 17$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 35 \end{array}$$

$3\not{0}\not{0} \mid 48 \mid 26 \mid 16$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 18 \\ 18 \\ \hline ..(26) \end{array}$$

$6\not{0}\not{0} \mid 738 \mid 71 \mid 123$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \hline 13 \\ 12 \\ \hline 18 \\ 18 \\ \hline ..(71) \end{array}$$

§. 33.

Wenn man den herausgekommenen Quotienten nach verrichteter Diviſion mit dem Diviſor multiplicirt; und zu dem herausgekommenen Produkt den Reſt, wenn einer vorhanden iſt, addirt, ſo giebt das Produkt den Dividendus.

Sechster Abſchnitt.

Von den Brüchen, und von den Rechnungsarten mit den Brüchen.

§. 34.

Wird ein gewiſſes Ganze in etliche gleich große Theile abgetheilt, ſo nennt man einen oder mehrere dieſer Theile des Ganzen einen Bruch.

§. 35.

Diejenige Zahl eines Bruches, welche anzeigt, in wie viel gleichgroße Theile ein Ganzes abgetheilt worden iſt, heißt der Nenner: diejenige Zahl hingegen, welche beſtimmt, wie viel gleichgroße Theile man von einem Ganzen genommen habe, der Zähler. Um einen Bruch auszudrücken, wird der Zähler oberhalb und der Nenner unter dieſen, aber durch einen Querſtrich abgeſondert, geſchrieben:

Zum Exempel.

$\frac{2}{3}$ wird ausgeſprochen $\frac{\text{Zwey}}{\text{Drittel}}$

2. iſt der Zähler, und 3 der Nenner.

§. 36.

Ein ſogenannter eigentlicher oder ächter Bruch iſt derjenige, welcher nur aus

 ein

einem oder aus etlichen gleich großen Theilen ei- nes Ganzen beſieht, und niemals ein Ganzes, ſondern immer weniger gilt. Ein uneigentli- cher oder unächter Bruch aber iſt ein ſolcher, welcher entweder mehr, oder auch ſo viel als ein Ganzes gilt; oder deſſen Zähler entweder größer als der Nenner, oder eben ſo groß als der Nenner iſt.

§. 37.

Ueberdies theilt man die Brüche auch noch ein, 1) in reine und 2) in gemiſchte Brüche. Reine Brüche ſind diejenige, welche keine gan- ze Zahlen vor ſich haben; gemiſchte Brüche hingegen ſolche, denen ganze Zahlen angehängt ſind, oder die ganze Zahlen vor ſich haben.

§. 38.

Außer dieſen angeführten Fällen beſtehen, bey den Brüchen die Zähler und Nenner aus ganzen Zahlen, und auch aus gebrochenen Zah- len. Im erſten Fall heißen die Brüche ein- fache Brüche, in andern hingegen doppelte oder gebrochene Brüche.

§. 39.

Diejenige Brüche, deren Nenner ein Zehne, oder ein Produkt aus Zehen iſt, nennt man Decimalbrüche.

§. 40.

Einen gegebenen Bruch in einen andern verwandlen, daß er den nämlichen Werth behalte geſchieht aus viererley Arten, nämlich:

1) wenn man zwey oder mehrere Brüche unter einerley Benennung bringt; oder dieſelbe ſo verwandelt, daß ſie alle ohne Veränderung ihres Werthes einen gleichen Nenner bekommen.

2) Durch das Abbreviren, oder durch das Aufheben der Brüche, wenn man einen Bruch ohne Veränderung ſeines Werths durch einen kleinern Zähler and Nenner ausdrückt.

3) Durch die Reſolution der Brüche, wenn man einen Bruch ohne Veränderung ſeines Werths in einen andern verwandelt, deſſen Nenner gegeben iſt. Und endlich

4) durch das Einrichten gemiſchter Brüche, man man dieſelbe in unächte reine Brüche verwandelt.

§. 41.

Es ſind zwey oder auch mehrere Brüche gegeben, welche verſchiedene Nenner haben, man ſoll dieſe Brüche ſo verändern, daß alle gleiche Nenner bekommen, ohne daß die Größe der Brüche ſelbſt geändert wird, oder, (wie man gewöhnlich zu ſagen pflegt,) man ſoll die Brüche unter einerley Benennung bringen.

Auflöſung.

Sind nur zwey Brüche gegeben, ſo multiplicire man einen jeden Bruch durch des andern Nenner: z. E. es ſollen die Brüche $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{4}$ unter einerley Benennung gebracht werden; ſo multiplicire man den Zähler des erſten Bruchs mit dem Nenner des andern Bruches; alsdenn den Zähler des andern Bruches mit dem Nenner des erſten Bruches, und endlich multiplicire man die beyden Nenner mit einander, und ſetze dieſes Produkt an, ſo bekommt man die Brüche $\frac{18}{24}$ und $\frac{20}{24}$, welche gleiche Nenner haben, und eben ſo viel gelten, als $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{4}$.

Sind mehrere Brüche gegeben; ſo multiplicire man

1) eines jeden Zähler und Nenner mit dem Produkt aus allen Nennern der übrigen Brüche. z. E. Es ſollen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{5}$ unter gleiche Benennung gebracht werden; ſo multiplicire man des erſten Bruchs Zähler und Nenner durch 10 des dritten Bruchs Zähler und Nenner durch 6. hierdurch erhält man $\frac{15}{30}$ $\frac{20}{30}$ $\frac{12}{30}$, welche Brüche gleiche Nenner haben, und eben ſo groß ſind als die gegebenen Brüche. Oder

2) man multiplicire alle Nenner der gegebenen Brüche in einander: ſo giebt das Produkt den gemeinſchaftlichen Nenner. In dieſen gemeinſchaftlichen Nenner dividire man mit allen Nennern der gegebenen Brüche, die herausgekommene Quotienten aber multi-

multiplicire man mit allen Zählern der gegebenen Brüche. Die ſich ergebende Produkte ſind die Zähler zu den Brüchen, welche alle den gefundenen gemeinſchaftlichen Nenner haben, und den gegebenen Brüchen gleich ſind.

Zum Exempel.

Es ſollen die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{7}$ unter gleiche Benennung gebracht werden, ſo geſchiehet dieſes auf folgende Weiſe:

2. der Nenner des erſten Bruchs
3. — — des andern — —

6. Produkt des erſten in den andern
5. der Nenner des dritten Bruchs.

30. Produkt des Nenners des dritten Bruchs in das Produkt der zwey erſten Brüche.
7. Nenner des vierten Bruchs

210. Produkt aller vier Nenner oder der gemeinſchaftliche Nenner

$\frac{1}{2}$	105	—	—	—	105
$\frac{2}{3}$	70	—	—	—	140
$\frac{3}{5}$	42	—	—	—	126
$\frac{2}{7}$	30	—	—	—	60

folglich ſind $\frac{105}{210}$ $\frac{140}{220}$ $\frac{126}{210}$ und $\frac{60}{210}$ diejenige Brüche, welche ſtatt der gegebenen Brüche gelten können, und welche alle gleiche Nenner haben, nämlich 210.

§. 42.

Es läßt ſich aber dieſe Rechnung zuweilen abkürzen, wenn nämlich unter den gegebenen Brüche die Nenner ſo beſchaffen ſind, daß der größte Nenner durch alle andere kleinere Nenner ohne Reſt kann dividirt werden. In dieſem Fall nimmt man den größten Nenner für den gemeinſchaftlichen Nenner an; dividirt man nun mit den Nenner der übrigen gegebenen Brüche darein, ſo ſind ſämmtliche Brüche unter einen gemeinſchaftlichen Nenner gebracht.

Zum Exempel.

Es ſeyn die Brüche $\frac{3}{7}$, $\frac{9}{14}$ $\frac{13}{28}$ gegeben. Bey genauer Ueberſicht dieſer Brüche findet man ſogleich, daß der Nenner im dritten Bruche 28 auch durch die übrige Nenner getheilt werden kann. Mithin wird die Rechnung, wenn man 28 für den gemeinſchaftlichen Nenner annimmt, wie im vorhergehenden §. angezeigt worden, verrichtet, und auf folgende Weiſe gerechnet.

(28.)

$\frac{3}{7}$ 4 — — — 12
$\frac{9}{14}$ 2 — — — 18
$\frac{13}{28}$ 1 — — — 13

folglich ſind die Brüche $\frac{12}{28}$ $\frac{18}{28}$ und $\frac{13}{28}$ den gegebenen Brüchen gleich; und haben alle Brüche 28 zum gemeinſchaftlichen Nenner.

§. 43.

§. 43.

Einen gegebenen Bruch einfacher auszudrücken, oder, wie man gemeiniglich zu ſagen pflegt, einen Bruch aufheben, oder abbreviren.

Auflöſung.

Man ſuche eine Zahl, womit ſich ſowohl der Zähler als der Nenner des Bruchs theilen läßt, ohne daß ein Reſt bleibet. Z. E. Es ſoll der Bruch $\frac{36}{48}$ aufgehoben werden; ſo iſt es augenfällig, daß ſich ſowohl der Zähler als auch der Nenner mit 12 theilen läßt. Dividirt man nun mit 12 in 36 als den Zähler, und in 48 als den Nenner, ſo entſteht ein Bruch $\frac{3}{4}$, welcher kürzer ausgedrückt iſt, aber doch eben ſo groß als der gegebene Bruch $\frac{36}{48}$ iſt.

Anmerkung.

Beſteht der Zähler und Nenner, oder auch nur einer von beyden aus ungeraden Zahlen, ſo muß die Zahl, womit der Bruch aufgehoben werden ſoll, auch eine ungerade Zahl ſeyn: ſind aber der Zähler und Nenner gerade Zahlen, ſo können dieſelbe ſowohl durch gerade als ungerade Zahlen aufgehoben werden.

§. 44.

Einen Bruch in einen andern Bruch verwandeln, daß er den nämlichen Werth behal-

behalte, und zwar durch das Reſolviren oder durch die Reſolution.

Auflöſung.

1) Man multiplicire den Zähler des gegebenen Bruches mit dem gegebenen Nenner; und

2) dividire man das Produkt durch den Nenner des Bruches, ſo giebt der Quotient den Zähler eines Bruches, welcher den gegebenen Nenner hat, und dem gegebenen Bruch gleich iſt.

Zum Exempel.

Es ſoll der Bruch $\frac{3}{4}$ in einen Bruch verwandelt werden, deſſen Nenner 16 iſt, ſo multiplicire man den Zähler 3 mit dem gegebenen Nenner 16, giebt das Produkt 48 mit dem Nenner 4 dieſes Produkt dividirt, giebt 12 zum Quotienten: folglich $\frac{12}{16}$ eben ſo viel als $\frac{3}{4}$.

§. 45.

Einen gemiſchten Bruch einrichten.

Auflöſung.

1) Man multiplicire die ganze Zahl, welche demſelben angehängt iſt, mit dem Nenner des Bruchs; und

2) zu

2) zu dem Produkt addire man den Zähler dieſes Bruchs; ſo iſt

3) die Summe der Zähler zu einem unächten reinen Bruche, welcher den Nenner des gegebenen Bruches zu ſeinem Nenner hat, und dem gegebenen gemiſchten Bruch gleich iſt.

Zum Exempel.

Es ſoll der Bruch $3\frac{1}{2}$ eingerichtet werden; ſo multiplicire man 3 mit dem Nenner 2 hiezu den Zähler 1 addirt, ſo iſt die Summe 7 zum Zähler eines Bruches, welcher 2 zum Nenner hat, folglich $\frac{7}{2}$ iſt: und dieſer Bruch gilt eben ſo viel als $3\frac{1}{2}$.

§. 46.

Es ſind zwey oder mehrere Brüche gegeben, man ſoll dieſelben zuſammen addiren.

Auflöſung.

Hierbey ſind zwey Fälle zu betrachten: denn einmal haben die Brüche einerley Nenner, oder aber zweytens haben ſie verſchiedene Nenner.

Im erſten Fall werden die Zähler aller gegebenen Brüche zuſammen addirt, und die Summe wird zum Zähler eines Bruches gemacht, der den Nenner der gegebenen Brüche hat.

behalte, und zwar durch das Reſolviren oder durch die Reſolution.

Aufloͤſung.

1) Man multiplicire den Zaͤhler des gegebenen Bruches mit dem gegebenen Nenner; und

2) dividire man das Produkt durch den Nenner des Bruches, ſo giebt der Quotient den Zaͤhler eines Bruches, welcher den gegebenen Nenner hat, und dem gegebenen Bruch gleich iſt.

Zum Exempel.

Es ſoll der Bruch $\frac{3}{4}$ in einen Bruch verwandelt werden, deſſen Nenner 16 iſt, ſo multiplicire man den Zaͤhler 3 mit dem gegebenen Nenner 16, giebt das Produkt 48 mit dem Nenner 4 dieſes Produkt dividirt, giebt 12 zum Quotienten: folglich $\frac{12}{16}$ eben ſo viel als $\frac{3}{4}$.

§. 45.

Einen gemiſchten Bruch einrichten.

Aufloͤſung.

1) Man multiplicire die ganze Zahl, welche demſelben angehaͤngt iſt, mit dem Nenner des Bruchs; und

2) zu

2) zu dem Produkt addire man den Zähler dieſes Bruchs; ſo iſt

3) die Summe der Zähler zu einem unächten reinen Bruche, welcher den Nenner des gegebenen Bruches zu ſeinem Nenner hat, und dem gegebenen gemiſchten Bruch gleich iſt.

Zum Exempel.

Es ſoll der Bruch $3\frac{1}{2}$ eingerichtet werden; ſo multiplicire man 3 mit dem Nenner 2 hiezu den Zähler 1 addirt, ſo iſt die Summe 7 zum Zähler eines Bruches, welcher 2 zum Nenner hat, folglich $\frac{7}{2}$ iſt: und dieſer Bruch gilt eben ſo viel als $3\frac{1}{2}$.

§. 46.

Es ſind zwey oder mehrere Brüche gegeben, man ſoll dieſelben zuſammen addiren.

Auflöſung.

Hierbey ſind zwey Fälle zu betrachten: denn einmal haben die Brüche einerley Nenner, oder aber zweytens haben ſie verſchiedene Nenner.

Im erſten Fall werden die Zähler aller gegebenen Brüche zuſammen addirt, und die Summe wird zum Zähler eines Bruches gemacht, der den Nenner der gegebenen Brüche hat.

Zum Exempel.

$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$
$\frac{7}{8} + \frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{16}{8} = 2.$
$\frac{4}{7} + \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}.$

Im zweyten Fall, wenn die Brüche verſchiedene Nenner haben, ſo bringe man ſolche nach §. 41.

1) unter einerley Benennung,

2) addire man die neuen Zähler derſelben, und mache dieſe Summe zum Zähler eines Bruches, welche den gefundenen gemeinſchaftlichen Nenner hat.

Zum Exempel.

$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ gegebene Brüche.
$\frac{8}{12} + \frac{9}{12}$ reducirte Brüche.
$\frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$ Summe der Brüche.

$3/5 + 1/2 + 3/4 =$ gegebene Brüche.
$\frac{12}{20} + \frac{10}{20} + \frac{15}{20} =$ reducirte Brüche.
— $\frac{37}{20} = 1\frac{17}{20} =$ Summe der Brüche.

$\frac{1}{3} + \frac{5}{7} + \frac{3}{5} + \frac{1}{8}$ gegebene Brüche.
$\frac{280}{840} + \frac{600}{840} + \frac{504}{840} + \frac{105}{840}$ reducirte Brüche.
$\frac{1489}{840} = 1\frac{649}{840} =$ Summe der Brüche.

§. 47.

Einen gegebenen Bruch von einem andern gegebenen größern zu ſubtrahiren.

Auf

Auflöſung.

Es giebt wieder vier Fälle. Erſter Fall. Haben die Brüche gleiche Nenner, ſo ziehe man den kleinen Zähler von den größern ab, und der Reſt iſt alsdenn der Zähler eines Bruches, welcher den Nenner der gegebenen Brüche hat.

Zum Exempel.

$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ Reſt.
$\frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$ Reſt.
$\frac{18}{37} - \frac{5}{37} = \frac{13}{37}$ Reſt.

Zweyter Fall. Haben die gegebenen Brüche verſchiedene Nenner, ſo bringe man ſolche nach §. 41. unter einerley Benennung; alsdenn ziehe man den neuen Zähler des größeren Bruches von dem kleineren ab; und den Reſt nehme man zum Zähler eines Bruchs, welcher den gefundenen gemeinſchaftlichen Nenner hat.

Zum Exempel.

Gegebene Brüche.	$\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{7}$
Reducirte Brüche.	$\frac{15}{20} - \frac{8}{20}$	$\frac{7}{21} - \frac{6}{21}$
Reſt der Brüche.	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{21}$

Dritter Fall. Soll ein Bruch von einer ganzen Zahl ſubtrahirt werden, ſo verwandle man die ganze Zahl in einen Bruch, welche den Nenner des gegebenen Bruches hat.

Zum

Zum Exempel.

Es ſoll $\frac{2}{3}$ von 4 ſubtrahirt werden, ſo wird 4 in den Bruch $\frac{12}{3}$ verwandelt, alsdenn 2 von 12 abgezogen, ſo iſt der geſuchte Reſt $\frac{10}{3}$ oder $3\frac{1}{3}$.

Vierter Fall. Sollen gemiſchte Brüche von einander ſubtrahirt werden, ſo verwandle man 1) beyde in unächte Brüche, und ſubtrahire man ſolche alsdenn: oder 2) ziehe man den Bruch, welcher der ganzen Zahl, die ſubtrahirt werden ſoll, angehängt iſt vor dem Bruche der größern Zahl, und hernach die kleinere ganze Zahl von der größern ab; auf den Fall aber, daß der Bruch der kleinern Zahl größer iſt als derjenigen der größern, ſo borge man von der größern ganzen Zahl 1, verwandle ſolche in einen Bruch, welcher den Nenner des kleinern Bruchs hat; alsdenn addire man zu dieſem den kleinern Bruch, und endlich ſubtrahire man die Brüche und ganze Zahlen.

Zum Exempel.

Es ſoll $3\frac{1}{3}$ von $7\frac{2}{3}$ abgezogen werden, ſo iſt der geſuchte Reſt $4\frac{1}{3}$. Es ſoll ferner $2\frac{1}{4}$ von $5\frac{1}{2}$ ſubtrahirt werden: ſo verwandle man beyde zuerſt in die unächte Brüche $\frac{9}{4}$ und $\frac{11}{2}$ alsdenn bringe man die Brüche unter gleiche Nenner $\frac{9}{4}$ und $\frac{22}{4}$ nun ſubtrahire man die

Zähler

Zähler von einander, ſo iſt der Reſt $\frac{13}{4}$ oder $3\frac{1}{4}$. Noch weiters ſoll $4\frac{2}{3}$ von $6\frac{1}{2}$ ſubtrahirt werden, und zwar die Brüche und ganze Zahlen allein, ſo borge man, weil der Bruch $\frac{2}{3}$ größer iſt als $\frac{1}{2}$ zuerſt 1 von 6; verwandle dieſes in den Bruch $\frac{2}{2}$, und addire $\frac{1}{2}$ dazu, ſo bekommt $\frac{3}{2}$ worauf $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{2}$, ſobald dieſe beyde Brüche unter einen gemeinſchaftlichen Nenner gebracht worden ſind, nämlich $\frac{4}{6}$ und $\frac{9}{6}$ ſubtrahirt werden können, wo alsdenn die Differenz der beyden Brüche $\frac{5}{6}$ zu der Differenz der ganzen Zahlen 4 und 5, welche 1 iſt, geſetzt wird: mithin iſt die geſuchte Differenz $1\frac{5}{6}$.

§. 48.

Einen Bruch mit einem andern Bruch multipliciren heißt nichts anders, als den erſten Bruch in ſo viel Theile theilen, als des andern Bruches Nenner Einheiten hat, und von dieſen Theilen ſo viel nehmen, als des andern Bruches Zähler hat. Erſteres geſchieht durch die Multiplication der Nenner, das leztere hingegen durch die Multiplication der Zähler: folglich; wenn man einen andern Bruch multipliciren ſoll, ſo darf man nur den Zähler des einen Bruches mit dem Nenner des andern Bruches multipliciren, ſo giebt alsdenn das erſte Produkt den Zähler, das andere hingegen den Nenner eines Bruches, welches dem geſuchten Produkt beyder Brüche gleich iſt.

Zum

Zum Exempel.

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$
$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$
$$\frac{2}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{72} = \frac{1}{12}.$$

§. 49.

Um ſich dieſer Auflöſung vergewiſſert zu halten; ſo dividire man das Multiplicandum durch den Nenner des Multiplicators, und den herausgekommenen Quotienten multiplicire man mit dem Zähler des Multiplicators. Alſo

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times (\frac{2}{3} : 4) \times 3 = \frac{2}{3 \times 4}$$

um $= \frac{2 \times 3}{3 \times 4}$

§. 50.

Auf eine andere Art die Brüche mit einander zu multipliciren; ſo dividire man kreuzweiſe des Multiplicandi Zähler durch des Multiplicators Nenner, und jenen Nenner durch dieſen Zähler: ſo iſt erſterer Quotient der Zähler, und letzterer der Nenner des geſuchten Quotienten.

Zum Exempel.

$$\frac{6}{8} \times \frac{2}{3} \times \frac{6 : 3}{8 : 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

§. 51.

§. 51.

Eben dieſe Aufgabe kann auch noch auf folgende Art aufgelößt werden: man multiplicire den Zähler des Multiplicandi in den Multiplicator, und laſſe den Nenner ungeändert.

Zum Exempel.

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{\frac{12}{7}}{5};\quad \frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{\frac{21}{8}}{5}$$

§. 52.

Noch anders

Man dividire des Multiplicand' N[illegible] mit dem Multiplicator, und beh[illegible] Zähler.

Zum Exempel.

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{\frac{4}{35}}{3};\quad \frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{\frac{3}{40}}{7};$$

§. 53.

Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden, ſo multiplicire man nur den Zähler des gegebenen Bruches mit der gegebenen ganzen Zahl. Das Produkt giebt den Zöhler eines Bruches, welcher den Nenner des gegebenen Bruches hat, und das geſuchte Produkt iſt.

Zum Exempel.

Es ſoll $\frac{3}{4}$ mit 2 multiplicirt werden, ſo iſt das Produkt $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$. Oder $\frac{1}{3}$ mit 4 $= \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, oder $\frac{7}{12}$ mit 8 $= \frac{56}{12} = 4\frac{2}{3}$.

§. 54.

Sollen gemiſchte Brüche mit einander multiplicirt werden, ſo verwandle man dieſelbe zuerſt in unächte Brüche, und multiplicire als: man denn ſolche nach §. 46.

Zum Exempel.

Es ſollen $3\frac{1}{2}$ und $4\frac{2}{7}$ mit einander multiplicirt werden, ſo verwandle man dieſelbe nach §. 44. in unächte Brüche, nämlich $\frac{7}{2}$ und $\frac{30}{7}$, ſo iſt das Produkt $\frac{210}{14}$ oder 13 oder $6\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{5}$ multiplicirt, giebt zum Produkt $\frac{60}{15} = 4$.

§. 55.

Einen gegebenen Bruch mit einem andern gegebenen Bruch zu dividiren.

Erſte Aufloͤſung.

Man multiplicire kreuzweiſe des Dividendi Zähler in des Diviſors Nenner, und des Dividendi Nenner in des Diviſors Zähler; ſo iſt erſteres Produkt der Zähler, und letzteres der Nenner des geſuchten Bruches.

Oder

Oder man kehre den Diviſor um, das heißt; man mache den Zähler deſſelben zum Nenner, und den Nenner zum Zähler; alsdenn multiplicire man denſelben mit dem andern Bruch; ſo iſt das gefundene Produkt der geſuchte Quotient.

Zum Exempel.

Es ſoll $\frac{2}{3}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden;

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}.$$

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{9} = \frac{3}{4} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}.$$

Zweyte Auflöſung.

Man dividire den Zähler und Nenner des Dividendi, jenen durch den Zähler, und dieſen durch den Nenner des Diviſors: ſo iſt jener Quotient der Zähler, und dieſer der Nenner des geſuchten Bruches.

Zum Exempel.

$$\frac{21}{24} : \frac{3}{8} = \frac{21}{24} \times \frac{8}{3} = \frac{168}{72} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

Dritte Auflöſung.

Man dividire den Zähler des Dividendi durch den Diviſor, und laſſe den Nenner ungeändert.

Zum Exempel.

$$\frac{5}{8} : \frac{4}{9} = \frac{5}{8} \times \frac{9}{4} = \frac{5 \times \frac{9}{4}}{8} = \frac{5 : \frac{4}{9}}{8}.$$

Vierte Auflöſung.

Man multiplicire des Dividendi Nenner durch den Diviſor, und laſſe den Zähler ungeändert.

Zum Exempel.

$$\frac{5}{8} : \frac{4}{9} = \frac{5}{8} \times \frac{9}{4} = \frac{5}{8 : \frac{9}{4}} = \frac{5}{8 \times \frac{4}{9}}.$$

§. 56.

Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden; ſo multiplicire man nur den Nenner des Bruches mit der gegebenen Zahl, ſo giebt das Produkt den Nenner eines Bruches, welcher den Zähler des gegebenen Bruches hat, und der geſuchte Quotient iſt.

Zum Exempel.

Es ſoll $\frac{3}{4}$ durch 2 dividirt werden; ſo iſt der Quotient $\frac{3}{8}$.

$$\frac{7}{8} : 2 = \frac{7}{16}. \quad \frac{5}{6} : 5 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

§. 57.

Sollen gemiſchte Brüche dividirt werden, ſo verwandle man ſie zu allererſt nach §. 44. in unächte Brüche, und verfahre nach der im 54. §. gegebenen Anweiſung.

Zum

Zum Exempel.

Es ſoll $3\frac{2}{5}$ durch $1\frac{3}{4}$ dividirt werden.

$3\frac{2}{5} : 1\frac{3}{4} = \frac{17}{5} : \frac{7}{4}$, oder
$\frac{17}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{68}{35} = 1\frac{33}{35}$. Quotient.

Oder: es ſoll $6\frac{2}{9}$: durch $\frac{5}{8}$ dividirt werden:

$6\frac{2}{9} : \frac{5}{8} = \frac{56}{9} \times \frac{8}{5} = \frac{448}{45} = 9\frac{43}{45}$
der geſuchte Quotient.

Anmerkung.

So viel von den Rechnungen mit unbenannten Zahlen. Ehe und bevor man die Rechnungen mit benannten Zahlen, wie auch die Lehre von den Verhältniſſen und Proportionen gründlich einſehen will, muß man ſich nachfolgende Reſolvirung der Münzen, Maaße, und Gewichte wohl bekannt machen; als:

Münz.

60. Kreuzer machen einen Gulden.
15. Batzen, ebenfalls.
20. Groſchen, desgleichen.
4. Kreuzer iſt ein Batzen.
3. Kreuzer ein Groſchen.
4. Pfennige ein Kreuzer.
8. Heller, desgleichen.
2. Heller ein Pfennig.

Vierte Auflöſung.

Man multiplicire des Dividendi Nenner durch den Diviſor, und laſſe den Zähler ungeändert.

Zum Exempel.

$$\tfrac{5}{8} : \tfrac{4}{9} = \tfrac{5}{8} \times \tfrac{9}{4} = \frac{5}{8 : \tfrac{9}{4}} = \frac{5}{8 \times \tfrac{4}{9}}.$$

§. 56.

Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden; ſo multiplicire man nur den Nenner des Bruches mit der gegebenen Zahl, ſo giebt das Produkt den Nenner eines Bruches, welcher den Zähler des gegebenen Bruches hat, und der geſuchte Quotient iſt.

Zum Exempel.

Es ſoll $\tfrac{3}{4}$ durch 2 dividirt werden; ſo iſt der Quotient $\tfrac{3}{8}$.

$$\tfrac{7}{8} : 2 = \tfrac{7}{16}. \quad \tfrac{5}{6} : 5 = \tfrac{5}{30} = \tfrac{1}{6}.$$

§. 57.

Sollen gemiſchte Brüche dividirt werden, ſo verwandle man ſie zu allererſt nach §. 44. in unächte Brüche, und verfahre nach der im 54. §. gegebenen Anweiſung.

Zum Exempel.

Es ſoll $3\frac{2}{5}$ durch $1\frac{3}{4}$ dividirt werden.

$3\frac{2}{5} : 1\frac{3}{4} = \frac{17}{5} : \frac{7}{4}$, oder
$\frac{17}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{68}{35} = 1\frac{33}{35}$. Quotient.

Oder: es ſoll $6\frac{2}{9}$: durch $\frac{5}{8}$ dividirt werden:

$6\frac{2}{9} : \frac{5}{8} = \frac{56}{9} \times \frac{8}{5} = \frac{448}{45} = 9\frac{43}{45}$
der geſuchte Quotient.

Anmerkung.

So viel von den Rechnungen mit unbenannten Zahlen. Ehe und bevor man die Rechnungen mit benannten Zahlen, wie auch die Lehre von den Verhältniſſen und Proportionen gründlich einſehen will, muß man ſich nachfolgende Reſolvirung der Münzen, Maaße, und Gewichte wohl bekannt machen; als:

Münz.

60. Kreuzer machen einen Gulden.
15. Batzen, ebenfalls.
20. Groſchen, desgleichen.
4. Kreuzer iſt ein Batzen.
3. Kreuzer ein Groſchen.
4. Pfennige ein Kreuzer.
8. Heller, desgleichen.
2. Heller ein Pfennig.

Abbrevirt.

60. Kr. iſt 1 fl.
15. Baz. = 1 fl.
20. Gr. = 1 fl.
4. Kr. = 1 Baz.
3. Kr. = 1 Gr.
4. Pf. = 1 Kr.
8. hl. = 1 Kr.
2. hl. = 1 Pf. oder dl.

Gewicht.

32. Loth iſt ein Pfund. ℔.
8. Loth = ein Vierling. Vr.
4. Vierling = ein ℔.
100. ℔. = ein Ceutner. Ctr.
1. Loth hat 4 Quint. Q.t.
1. ℔. Frohngewicht hält 1 ℔. 1 Loth, 1 Q.t. Kramergewicht.
100. ℔. Frohngewicht halten 103 ℔. 29. Lt. Kramergewicht netto.
1. ℔. Kramergewicht hat 2 Mkr. — $\frac{5}{8}$ Pf. Silbergewicht.

Silbergewicht.

1. Mark, Mr. hat $\frac{1}{2}$ ℔. oder 16. Loth. oder 8 Unzen.
1. Unz hat 2 Loth.
1. Loth hat 4 Quint.
1. Quint hat 4 Pfennige.
1. Pfennig hat 2 Häller.

Gold:

Goldgewicht.

1. Mr. hat 24. Karat.
1. Karat iſt 4. Gran.
1. Gran. 3. Grän.
3. Karat 2. Loth.
67$\frac{1}{4}$ gewichtige Ducaten: oder
70. Cronen Gewicht thun 1. Mr.

Apothecker-Gewicht.

1. Gran iſt ein Gerſtenkörnle ſchwer.
20. Gran iſt Scrupel.
3. Scrupel iſt 1. Drachma oder Quint.
8. Drachma iſt 1. Unze.
12. Unzen thun 1. ℔.

Augsburger Getreidt Maaß.

1. Schaff hat 8. Metzen.
1. Metzen hat 4. Vierling.
1. Vierling hat 4. Viertele.
1. Viertele hat 4. kleine Mäßle.

Augsburger Getränk Maaß.

1. Eicht- oder Viſier- Eymer hat 64 Maaß.
1. Schenk-Eymer hat 72 Maaß.
4. Maas iſt ein Napf.
2. Maas ein Viertel.

1. Maaß hat 2. Seidlen.
1. Maaß hat 4. Quart oder Onártle.
1. Seidle hat 2. Quártle.
1. Quártle 2. Achtele.

Feldmaaß.

1. Ruthe hat 10. Werkſchuh.
1. Schuh hat 10. Zoll.
1. Zoll 10. Linien.
1. Linie 10. Scrupel.
1. Quadratruthe hat 10. Quadratſchuh.
400. Quadratruthen, oder 40000. Quadratſchuh hält 1. Tagwerk.
60000. Quadratſchuh 1. Jauchert Feld oder Waldung.

Ellenmaaß.

1. Elle hat 16. Sechszehntheile.
4. Sechszehntheil iſt ein Viertel.
8. Sechszehntheil iſt $\frac{1}{2}$ Ellen.
4. Viertel iſt 1. Ellen.
2. Viertel iſt $\frac{1}{2}$ Ellen.

Vom Papier.

10. Rieß iſt ein Ballen.
20. Buch iſt ein Rieß.
25. Bogen iſt ein Buch Druckpapier.
24 Bogen iſt ein Buch Schreibpapier.

Von

Von der Zeit.

365. Tage iſt ein gemeines Jahr.
366. Tage iſt ein Schaltjahr, ſo alle 4 Jahre einfällt.
12. Monat machen ein Jahr.
52. Wochen machen ein Jahr.
7. Tage machen 1. Woche.
24. Stunden einen Tag.
60. Minuten eine Stunde.
60. Sekunden eine Minute.

Siebenter Abſchnitt.

Von den Rechnungsarten in genannten Zahlen.

I.

Durch die Addition.

§. 58.

Die im zweyten Abſchnitt abgehandelte Regeln gelten bey dieſen Rechnungen ebenfalls, und iſt zu denſelben weiter nichts hinzu zu ſetzen, als daß die Zahlen, welche einerley Namen führen, ordentlich unter einander geſchrieben werden müſſen.

Zum Exempel.

Es ſollen folgende Poſten, die man ſogleich gehörig untereinander ſetzen muß, nämlich

ſich Gulden unter Gulden, Kreuzer unter Kreuzer, Pfennige unter Pfennige, addirt werden; als:

fl.	kr.	Pf.
22.	38.	2.
58.	44.	3.
139.	55.	1.
246.	26.	3.
467 fl.	45 kr.	1 Pf.

Nachdem man die im vorigen Abſchnitt vorgemerkte Reſolvirung der Maaße, Münzen und Gewichte ſich bekannt gemacht haben muß, ſo hat man die unter dem Querſtrich geſetzte Summe auf folgende Art gefunden. Man hat zuerſt alle Pfennige eben ſo, wie die unbenannten Zahlen, in eine Summe gebracht. Dieſe Summe war 9. Da nun dieſe ſchon Kreuzer, oder einige ſolche größere Einheiten, deren jede aus 4. kleinern beſteht, enthält, ſo dividirte man ſie mit 4. Der Quotient 2 deutet an, wie viel Kreuzer, der Reſt 1 aber, wie viel Pfennige über 2. Kreuzer in 9 Pfennigen enthalten ſeyen. Der Reſt 1. wird folglich unter die Pfennige geſetzt, der Quotient 2. aber zu den Kreuzern addirt, deren Summe 165. betrug. Weil nun dieſe ſchon Gulden, oder wieder größere Einheiten, deren jede aus 60. kleinern beſteht, enthält, ſo dividirte man mit 60. darein. Der Quotient 2. zeigte an, wie viel Gulden, der Reſt 45. aber, wie viel Kreuzer

zer über 2. Gulden in 165. Kreuzer enthalten ſeyen. Man ſetze daher den Reſt 45. unter die Kreuzer, der Quotient 2. aber wurde zu den Gulden, deren Summe 467. ausmachte, addirt. Folglich beträgt die ganze Summe

467 fl. 45 kr. 1 Pf.

Exempel zur Uebung.

Centr.	℔.	Loth.	Quint.
13.	89.	27.	3.
24.	91.	31.	1.
6.	77.	18.	2.
14.	53.	9.	1.
48.	10.	12.	3.
108 Ct.	23 ℔.	3 Lt.	2 Qt.

Viſiereymer.	Maas.	Quártle.
12.	57.	3.
49.	43.	1.
8.	32.	3.
5.	19.	3.
20.	58.	2.
97 Eym.	20 Ms.	— Qrtle.

Schaff.	Metzen.	Viertele.
11.	7.	7.
23.	5.	3.
8.	1.	10.
43 Schff.	6 Mtz.	4 Viertele.

Ein Haushalter hat folgende fünf Ausgaben gehabt. Erſtlich 136 Gulden, 58 Kreuzer, 3 Pfennige. Zweytens 47 Gulden, 9 Kreuzer, 2 Pfennige. Drittens 204 Gulden, 48 Kreuzer, 3 Pfennige. Viertens 87 Gulden, 8 Kreuzer. Fünftens 107 Gulden, und 3 Pfennige. Wie groß iſt die ganze Ausgabe?

fl.	kr.	Pf.
136.	58.	3.
47.	9.	2.
204.	48.	3.
87.	8.	0.
107.	0.	3.
583. fl.	5. kr.	3. Pf.

Anmerkung.

Dergleichen Rechnungen kommen ſehr oft vor bey Verfertigung der Inventarien, und bey den Rechnungen der Haushalter; da es dann ſich öfter ereignet, daß man ſehr viele dergleichen Poſten, welche wohl mehrere Blätter anfüllen, zuſammen addiren muß. In dieſem Falle dann kann man jede Seite in mehrere Claſſen abtheilen; jede Claſſe beſonders addiren; die Particularſummen eines jeden Blattes auf ein beſonderes Papier ſchreiben: ſelbe zuſammen addiren, damit man alſo die Summe des ganzen Blattes bekomme. Dieſe Summe aus allen Claſſen einer Seite wird zu unerſt am Blatte

Blatte unter einem Querſtriche angeſchrieben. Eben dieſe Summe wird auch zu oberſt auf das folgende Blatt geſchrieben. Die Poſten dieſes folgenden Blattes werden, wie zuvor, in eine Summe gebracht; dieſe Summe unter die vorige geſchrieben; beyde zuſammen addiret, und alſo bekömmt man die Summe zwoer Seiten. Dieſe Summe wird zu oberſt auf der dritten Seite wieder angeſchrieben; dieſe dritte Seite abermal zuſammen gerechnet, u. ſ. f. bis man alle alle Poſten in eine Summe gebracht hat.

Ein reicher Bauer hat am Getreide laſſen ausdreſchen 7 Schaff, 6 Metzen, 3 Vierlinge; und wieder 13 Schaff, 7 Metzen, 2 Vierlinge; drittens 18 Schaff, 5 Metzen, 3 Vierlinge; viertens 20 Schaff, 7 Metzen, 3 Vierlinge; und endlich fünftens 19 Schaff, 3 Metzen, 2 Vierlinge. Was beträgt die ganze Summe?

Sch.	Mz.	Vr.
7.	6.	3.
13.	7.	2.
18.	5.	3.
20.	7.	3.
19.	3.	2.

80. Sch. 7. Mz. 1. Vr.

Ein Handelsmann hat einem Tuchmacher folgende Wolle geliefert. Erſtens 20 Centner

ner, 87 Pfund, 3 Vierlinge. Zweytens 38 Centner, 75 Pfunde. Drittens 41 Centner, 3 Vierlinge. Endlich viertens 54 Centner, 68 Pfunde, 1 Vierling. Wie viel macht alles aus? Der Centner zu 100 Pfunde gerechnet.

Cent.	℔.	Vr.
20.	87.	3.
38.	75.	0.
41.	0.	3.
54.	68.	1.
155 Ctr.	31 ℔.	1 Vr.

II.

Durch die Subtraction.

§. 59.

Bey der Subtraction in benannten Zahlen iſt nichts zu erinnern, und gelten die im vierten Abſchnitt vorgetragene Regeln, daß nämlich wie bey der Addition gleichnahmige Größen ordentlich unter einander geſetzt werden müſſen.

Zum Exempel.

	fl.	kr.	hl.
	88.	28.	3.
	15.	49.	7.
Reſt	72 fl.	38 kr.	4 hl.

Der

Der unter dem Querſtrich geſetzte Reſt wurde auf folgende Weiſe gefunden; als: es ſollten 7 hl. von 3 hl. abgezogen werden, weil aber dieſes nicht angieng, ſo borgte man von den gegen die linke Hand aufnotirten Kreuzern einen Kreuzer; hiezu die 3 hl. addirt, machte die Summe alſo 11 hl. aus; und hierauf von der Summe 11 hl. die gegebene 7 hl. abgezogen, verblieben 4 hl. dieſe wurden unter den Querſtrich in die Reihe der Häller geſetzt. Eben ſo konnten 49 kr. von 27 kr. nicht abgezogen werden; man mußte von den Gulden einen entlehnen, welcher 60 kr. hat, hiezu die 27 kr. addiren, und von der Summe 87 kr. alsdenn 49 kr. ſubtrahiren, wo 38 Reſt blieben. Endlich wurde die Subtraction mit den Gulden vorgenommen, und betrug der geſuchte ganze Reſt 72 fl. 38 kr. 4 hl.

Exempel zur Uebung.

	Ct.	℔.	Loth.	Quint.
	67.	13.	21.	2.
	58.	64.	29.	3.
Reſt	8 Ct.	48 ℔.	23 Lt.	3 Qt.

Eym.	Ms.	Qrtl.
13.	12.	2.
10.	57.	3.
2 Eym.	18 Ms.	3 Qrtl.

Schff.	Mz.	Vrt.
16.	7.	2.
8.	7.	3.
7 Schff.	7 Mz.	3 Vrt.

Einer iſt ſchuldig 25 Gulden, 35 Kreuzer, und 2 Pfennige. Daran bezahlt er 15 Gulden, 24 Kreuzer. Was bleibt ihm noch zu bezahlen?

fl.	kr.	Pf.
25.	35.	2.
15.	24.	0.
10 fl.	11 kr.	2 dl.

Ein Haushalter hat dieſes Jahr hindurch eingenommen 785 Gulden, 54 Kreuzer, und 3 Pfennige. Die Ausgabe des ganzen Jahrs beläuft ſich auf 640 Gulden, und 3 Pfennige. Wie viel hat er vorgeſchlagen?

fl.	kr.	Pf.
785.	54.	3.
640.	0.	3.
145 fl.	54 kr.	0 dl.

Eine Hauſerinn hat von ihrer Frau bekommen 15 Gulden. Davon hat ſie ausgegeben 5 Gulden, 7 Kreuzer; zweytens 2 Gulden und 5 Kreuzer; und drittens 26 Kreuzer,

zer, 3 Pfennige; was muß ſie noch zurücke geben?

Einnahmen.	fl.	kr.	Pf.	Ausgaben. fl.	kr.	Pf.
	15.	0.	0.	5.	7.	0.
Sum. d. Ausg.	7.	38.	3.	2.	5.	0.
Reſt : :	7 fl.	21 kr.	1 dl.	0.	26.	3.
				7 fl.	38 kr.	3 dl.

Ein Kaufmann hat 76 Centner, 87 Pfund Zucker gekauft; davon hat er verkauft 49 Centner, 89 Pfund, und 14 Loth. Wie viel hat er noch im Vorrath?

Cent.	℔.	Lt.
76.	87.	0.
49.	89.	14.
26 Cent.	97 ℔.	18 Lt.

Ein Bauer hat 168 Schaff Getreid aufbehalten. Von dieſen verkauft er 65 Schaff, 6 Metzen, 3 Vierlinge. Wie viel behält er noch im Vorrath?

Sch.	Mz.	Vr.
168.	0.	0.
65.	6.	3.
102 Sch.	1 Mz.	1 Vr.

Die Sonne läuft den Frühling und Sommer über vom Widder bis in die Wage in 186

Tagen,

Tagen, 14 Stunden, und 53 Minuten; den Herbſt und Winter durch von der Wage bis in den Widder in 178 Tagen, 14 Stunden, 56 Minuten. Wie viel iſt das erſte halbe Jahr größer als das andere?

T.	St.	Min.
186.	14.	53.
178.	14.	56.
7 Tag.	23 St.	57 Min.

Wenn ein feſter Körper in eine flüßige Materie verſenkt wird, ſo verliert er etwas an ſeiner Schwere. Geſetzt nun, man hätte einen Stein, der in der Luſt 100 Pfund wäge. Nun hienge man ſelben an einem Stricke in das Waſſer, und befände an der Waage, daß er nur noch 40 Pfund, 16 Loth, 3 Quintlein wäge. Wie viel würde er im Waſſer von ſeiner Schwere verloren haben?

℔.	Lt.	Qt.
100.	0.	0.
40.	16.	3.
59 ℔.	15 Lt.	1 Qt.

Man kann auch durch die Subtraction das das Alter eines Menſchen finden. Wobey zu merken iſt, daß man in der obern Reihe immer die Zeit des Todes, in der untern Reihe hingegen die Zeit der Geburt anſetzen muß.

Zum

Zum Exempel.

Es iſt Jemand im Jahre 1748, den 23. Auguſt, Abends um 3 Uhr gebohren worden; und geſtorben im Jahre 1798, den 18. December, Morgens um 5 Uhr; wie alt wurde der Menſch?

1798 Jah.	12 Mon.	18 Tag.	5 Stun.
1748 ſ	8 Mon.	23 Tag.	15 Stun.
Alt. 50 Jahr.	3 Mon.	24 Tag.	14 Stun.

In der obern Reihe wurden bey der Zeit des Todes 12 Monat angeſetzt, weil der December der zwölfte Monat im Jahr iſt; in der untern Reihe hingegen 8 Monat, weil der Auguſt der achte Monat im Jahr iſt. Desgleichen wurden bey der Zeit des Todes 15 Stunden angeſetzt, weil der um Mitternacht anfängt, und von da bis 3 Uhr Abends 15 Stunden verfloſſen ſind. Bey der Subtraction mußte in der untern Reihe ein Tag, oder 24 Stunden entlehnt, oder geborgt, und hiezu 5 Stunden addirt, von der Summe 29 aber 15 abgezogen werden, wo alsdenn der Reſt 14 Stunden blieb. Weil auch 23 Tag von 17 Tag nicht abgezogen werden konnten, ſo mußte ein Monat, welcher in dieſem Exempel 30 Tag hat, denn der vorhergehende Monat November hat nur 30 Tag, geborgt werden. Dieſe 30 Tage zu 17 Tag addirt, iſt die Summe 47 Tag, wovon 23 Tage ab-

gezogen werden können, und bleiben 24 Tage Reſt. Hierauf 8 Monat von 11 Monat, und 1748 Jahr von 1798 Jahr abgezogen, verbleiben 50 Jahre, 3 Monate, 24 Stunden für das geſuchte Alter.

Exempel zur Uebung.

Es wurde ein Menſch 1724, den 26. September Morgens um 1 Uhr gebohren; und ſtarb derſelbe 1763, den 2 Februar, Mittags um 12 Uhr, wie alt iſt der Menſch geworden? Antwort: 48 Jahre, 4 Monate, 7 Tage, 11 Stunden.

III.

Durch die Multiplication.

§. 60.

Es ſollen 15 fl. 54 kr. 7 Pf. mit 7 multiplicirt werden. Dieſes kann auf dreyerley Weiſe geſchehen.

1) Multiplicire man zuerſt 7 Pfennige mit 7, ſo giebt das Produkt 49 Pf. und wenn man daſſelbe mit 4 dividirt hat, ſo bekommt man 12 kr. und 1 Pf. Hierauf multiplicire man 54 kr. mit 7. ſo giebt das Produkt 378 kr. hiezu die vorhingefundene 12 kr. addirt, ſo iſt die Summe 390 kr.; dividirt man dieſe Zahl mit 60, ſo giebt der Quotient 6 fl. 30 kr. endlich multipli-

tiplicire man auch 15 fl. mit 7. ſo iſt das Produkt 105., addirt man dazu die ſo eben gefundene 6 fl. — ſo iſt die Summe 111 fl. — und das ganze geſuchte Produkt iſt 111 fl. 30 kr. 1 Pf.

2) Multiplicire man zuvörderſt 15 fl. mit 7, ſo giebt dieſes zum Produkt 105 fl. — Da nun 54 kr. $\frac{9}{10}$ fl. ausmachen, ſo multiplicire man ſolche mit 7, ſo iſt das Produkt $\frac{63}{10}$, oder $6\frac{3}{10}$ fl. die gefundene 6 fl. addire man zu dem vorher gefundenen Produkt, nämlich zu 105 fl. — ſo iſt die Summe 111 fl. — und da $\frac{1}{10}$ fl. 6 kr. ausmacht, ſo ſind $\frac{3}{10}$ zuſammen 18 kr. Nun ſind 7 Pf. eben ſoviel, als $\frac{7}{4}$ kr. multiplicirt man nun dieſelbe mit 7, ſo bekommt man $\frac{49}{4}$ Pf. oder mit 4 dividirt, giebt 12 kr. und 1 Pf. zu den vorhero gefundenen 18 kr. addire man nun die ſo eben berechnete 12 kr. ſo iſt die Summe 30 kr. und weil weiter nichts mehr zu multipliciren vorhanden, ſo iſt das ganze geſuchte Produkt 111 fl. 30 kr. 1 Pf.

Die 3te und auch gewöhnlichſte Weiſe benannte Zahlen zu multipliciren iſt folgende:

Es ſollen nämlich 15 fl. 54 kr. 1 Pf. mit 7 multiplicirt werden; ſo mache man zuvörderſt die 15 fl. zu Kreuzer, das heißt, man multiplicire 17 mit 60, ſo giebt das Produkt 900 kr., hiezu addire man die nebenſtehende 54 kr., ſo giebt die Summe 954 kr. Dieſe

Summe 954 mache man zu Pfennige mit 4, ſo giebt das Produkt 3816 Pf. hiezu die nebenſtehende 1 Pf. addirt, ſo iſt die Summe 3817 Pf. Dieſe ganze Summe 3817 multiplicire hierauf mit der gegebenen Zahl 7, ſo iſt das Produkt 26719 Pf. Dieſes Produkt dividire man mit 4, ſo bekömmt man 6679 kr., und 3 Pf. bleiben übrig; dieſen Quotienten 6679 dividire man endlich mit 60 fl., ſo giebt der Quotient 111 fl., und 19 kr. bleiben übrig; folglich iſt das ganze geſuchte Produkt 111 fl. 19 kr. 3 Pf.

Dieſes Exempel ſteht in der Rechnung, wie folgt:

```
fl. 15.   54 kr.   1 Pf.
     60.
  ---------
    900.
     54.
  ---------
    954.
      4.
  ---------
   3816.
      1.
  ---------
   3817 Pf.
       7 der gegebenen Zahl
  ---------
4 | 26719 |
  |  2333 |
  ---------
6 | 667   | 9: 3 dl.
  |   1   |
  ---------
fl. 111; 19 kr. 3 Pf.
```

Exem-

Exempel zur Uebung.

Man ſoll 217 Centner, 83 ℔. 27 Loth mit 236 multipliciren, ſo iſt das Produkt 51408 Centner, 58 ℔. und und 1 Loth.

Man multiplicire 18 Schaff, 7 Metzen, und 3 Vierling mit $\frac{3}{4}$. ſo muß das Produkt 14 Centner, 1 Metzen, $3\frac{1}{4}$ Vierling ſeyn.

Man multiplicire 34 Eymer, 57 Maas mit $2\frac{1}{8}$, ſo muß zum Produkt 74 Eymer, $9\frac{1}{8}$ Maas herauskommen.

Eine Armee brauchet monatlich für ihre Pferde 735 Schaff, 5 Metzen, und 2 Vierling Haber. Was braucht man in 6 Monaten?

	Sch.	Mz.	Vr.
	735.	5.	2.
			6.
die Prod. ſind	4411 Sch.	7 Mz.	4 Vr.

Ein Speiſemeiſter braucht täglich 3 Eymer, 25 Maaße, und 3 Quärtlein Bier. Was braucht er in einer Woche?

	Eym.	Ms.	Qrt.
	3.	25.	3.
			7.
die Produkte ſind	23 Eym.	50 Ms.	1 Qrt.

Eine Armee von 75000 Mann ſteht im Felde. Jedem Mann werden wochentlich

 Pfund

3 Pfund, und 2 Vierling Fleiſches gereichet. Wie viel braucht man in 6 Wochen?

	℔.	Vr.
	3.	2.
		6.
die Produkte ſind	21 ℔.	— Vr.

× 75000.

105.

147.

1575000 für alle zugleich

oder 15750 Centner.

Der Mond durchläuft in einer Stunde 32 Minuten, und 56 Secunden in ſeiner Laufbahne. Wie weit kömmt er in einem Tage?

	′	″
	32	56.
		24.
die Produkte ſind	790.	24.

IV.

Durch die Diviſion.

§. 61.

Es ſollen fl. 405: 18 kr. 6 hl. durch 6 dividirt werden; es kann dieſes auf zweyerley Art geſchehen.

1) Divi-

1) Dividire man in fl. 405 — mit 6, ſo iſt der Quotient fl. 67. — die übrig gebliebene fl. 3. mache man mit 60 zu Kreuzer, ſo iſt das Produkt 180 Kreuzer; hiezu addire man die nebenſtehende 18 kr. ſo iſt davon die Summe 198 Kreuzer, mit 6 dividirt, giebt zum Quotient 33 Kreuzer; da nun nichts übrig geblieben; ſo dividire man endlich in die dabey ſtehende 6 hl. mit 6, ſo iſt der Quotient 1 hl. und der ganze geſuchte Quotient beträgt fl. 67. 33 kr. 1 hl.

2) Verwandle man die fl. 405. 18 kr. 6 hl., wie oben bey der Multiplication gezeigt worden iſt, in Häller, ſo iſt die gefundene Zahl 194550. Dieſe dividire man mit 6, ſo iſt der ſich ergebende Quotient 32425 Häller. Dieſe dividire man mit 8, ſo kommen 4053 kr. heraus, und 1 hl. bleibt übrig: dieſe dividire man wieder mit 60, ſo giebt der Quotient fl. 67. und 33 kr. bleiben übrig; folglich iſt der ganze geſuchte Quotient fl. 67. 33 kr. 1 hl.

Auf der nächſtfolgenden Seite iſt die Berechnung dieſes Exempels nach ſeinen ganzen Inhalt detaillirt.

fl. kr. hl.
405. 18. 6.
60.

24300.
18 kr. addirt.

24318 kr.
8.

194544.
6 hl. addirt.

6 | 194550 hl.
| 1213

8 | 32425 hl.
| 1

6 | 0 kr. 405 | 3 : 1 hl.
| 43 |

fl. 67. 33 kr. 1 hl.

Exempel zur Uebung.

Man muß 243 Centner, 79 ℔. und 16 Loth mit 32 dividiren, ſo iſt der Quotient 7 Centner, 61 ℔. und $\frac{1}{2}$ Loth.

Man ſoll 11 Schaff, 6 Metzen, und 2 Viertel mit 14 dividiren, ſo muß der Quotient — Schaff, 6 Metzen, und 3 Viertel ſeyn.

Man ſoll 69 Eymer, 63 Maas mit $18\frac{3}{4}$ dividiren, ſo giebt der Quotient 3 Eymer, $46\frac{22}{25}$ Maas.

Achter

Achter Abſchnitt.

Von den Verhältniſſen und Proportionen.

§. 62.

Zwey Größen ſind einander gleich, oder ſie ſind einander ungleich. Iſt das letztere, und man ſoll ihre Ungleichheit beſtimmen, ſo kann dieſes auf zweyerley Weiſe geſchehen; nämlich: erſtens ſoll man beſtimmen, um wie viel die eine Größe die andere übertreffe, oder zweytens, wie vielmal die eine Größe größer ſey, als die andere. Beyde Beſtimmungen nennt man ein Verhältniß; und zwar die erſte, ein arithmetiſches Verhältniß, und die zweyte, oder letztere, ein geometriſches Verhältniß.

§. 63.

Sollen von zwey Größen ihre Gleichheit, oder Ungleichheit angegeben werden, ſo folgt hieraus von ſelbſt, daß die Größen von einerley Art ſeyn müſſen.

§. 64.

Die Unterſuchung, um wie viel die eine Größe größer als die andere iſt, geſchieht, daß man den Unterſchied zwiſchen den beyden Grö-

ſen, oder Zahlen beſtimme; dahero iſt ein arithmetiſches Verhältniß nichts anders, als der Unterſchied zwiſchen zweyen Zahlen.

§. 65.

Der Unterſchied zwiſchen zweyen Zahlen aber wird gefunden, wenn man von der größern Zahl die kleinere Zahl abzieht. Folglich gehören zu Beſtimmung eines arithmetiſchen Verhältniſſes folgende drey Stücke, als: 1) die größere Zahl; 2) die kleinere Zahl; und 3) der Unterſchied. Es haben aber dieſe drey Stücke eine ſolche Verbindung unter einander, daß man immer aus zwey derſelben das dritte finden kann.

§. 66.

Will man aus einer gegebenen größern Zahl, nebſt dem gegebenen Unterſchied die kleinere Zahl finden, ſo ziehe man den Unterſchied von der größern Zahl ab, ſo bekommt man die kleinere Zahl. Z. Ex.

Es ſey die größere Zahl = 5.
Der Unterſchied = 2.

So iſt die kleinere Zahl = 3.

§. 67.

Iſt der Unterſchied nebſt der kleinern Zahl gegeben, ſo läßt ſich die größere dadurch finden,

daß

daß man den gegebenen Unterſchied zu der gegebenen kleinern Zahl addirt. Z. Ex. 4 ſey der Unterſchied, 3 die kleinere Zahl, ſo muß 7 die größere Zahl ſeyn.

$$4 + 3 = 7.$$

§. 68.

Sind aber ſowohl die größere Zahl, als die kleinere Zahl gegeben, ſo erhält man den Unterſchied, wenn man die kleinere Zahl von der größern abzieht. Z. Ex.

6. ſey die größere Zahl,
2. — die kleinere Zahl,

ſo iſt 4 der Unterſchied.

$$6 - 2 = 4.$$

§. 69.

Wird zu den beyden gegebenen Zahlen eine andere beliebige Zahl addirt, oder davon ſubtrahirt, ſo bleibt der Unterſchied der nämliche.

Z. Ex.

Man addire zu den vorhin gegebenen Zahlen 6 und 2. eine andere Zahl nach Belieben 8, ſo iſt $6 + 8 - 2 + 8 = 4$ Unterſchied.

§. 70.

Sind zwey arithmetiſche Verhältniſſe einander gleich, ſo heißt dieſe Gleichheit, eine arithmetiſche Proportion.

§. 71.

§. 71.

Aus dieſem erhellet deutlich, daß eine jede arithmetiſche Proportion aus vier Gliedern zuſammen geſetzt iſt, welche ſo beſchaffen ſind, daß, wenn man das zweyte von dem erſten abzieht, der nämliche Reſt herauskömmt, als hätte man das vierte von dem dritten abgezogen.

Z. Ex.

18 — 5 = 2 — 7.

Anmerkung.

Dieſe vier Glieder einer arithmetiſchen Proportion können auf acht verſchiedene Weiſe verſetzt werden, ohne daß ſie deswegen aufhören ſollten, einander proportionirt zu ſeyn, wie

Zum Exempel.

18 — 5 = 20 — 7.
18 — 20 = 5 — 7.
5 — 18 = 7 — 20.
5 — 7 = 18 — 20.
20 — 18 = 7 — 5.
20 — 7 = 18 — 5.
7 — 5 = 20 — 18.
7 — 20 = 5 — 18.

§. 72.

Eine jegliche arithmetiſche Proportion hat auch überdem noch die Haupteigenſchaft nämlich,

daß

daß die Summe des zweyten und dritten Gliedes eben ſo groß iſt, als die Summe des erſten und vierten Gliedes.

Zum Exempel.

$18 - 5 = 20 - 7$
$18 + 7 = 25$ und $5 + 20 = 25.$

§. 73.

Sind in einer arithmetiſchen Proportion drey Glieder gegeben, ſo läßt ſich nach dem vorigen §. leicht das vierte Glied finden. Denn man darf nur das zweyte und dritte Glied zuſammen addiren, und von dieſer Summe das erſte Glied abziehen, ſo hat man das vierte Glied.

Zum Exempel.

Es ſey das erſte Glied = 17.
das zweyte — = 12.
das dritte — = 19.
So iſt die Summe des zweyten und dritten = 31. hievon das erſte
Glied = 17 abgezogen.
ſo iſt 14. das vierte Glied:
und die arithmetiſche Proportion:
$17 - 12 = 19 - 14.$

§. 74.

Im 62. §. iſt bereits erklärt worden, daß ein geometriſches Verhältniß ſey, welches beſtim=

ſtimme, um wie vielmal eine Größe größer ſey, als eine andere. Dieſes findet man, wenn man die eine in die andere dividirt, wo alsdenn der Quotient die Benennung des Verhältniſſes anzeigt.

§. 75.

Das geometriſche Verhältniß zwiſchen zweyen Zahlen anzuzeigen, bedient man ſich zweyer über einander geſetzten Punkten, wie bey der Diviſion.

§. 76.

Bey einem geometriſchen Verhältniß ſind drey Stücke in Acht zu nehmen. Erſtlich, die erſte von den beyden gegebenen Zahlen, welche der Vorſatz, Antecedens, heißt. Zweytens, die andere von den beyden gegebenen Zahlen, welche der Nachſatz, Conſequens, genennt wird; und drittens, die Benennung des Verhältniſſes der Exponent, welches man finden kann, wenn man den Vorſatz durch den Nachſatz dividirt. Z. Ex. Es ſoll zwiſchen 36 und 9 das Verhältniß beſtimmt werden; ſo iſt 36 der Vorſatz, 9 der Nachſatz, und die Benennung des Verhältniſſes wird ſeyn 36 : 9 = 4; welches anzeigt, daß der Vorſatz den Nachſatz viermal in ſich enthalte.

§. 77.

§. 77.

Eine geometriſche Proportion iſt nichts anders, als die Gleichheit zweyer geometriſchen Verhältniſſe. Z. Ex.

24 : 8 = 18. 6.

§. 78.

Eine jede geometriſche Proportion beſteht aus vier Gliedern, welche die Eigenſchaft haben müſſen, daß, wenn man das erſte durch das zweyte dividirt, eben ſoviel herauskommen muß, als wenn man das dritte durch das vierte dividirt; auch laſſen ſich die vier Glieder einer geometriſchen Proportion auf acht verſchiedene Weiſe verſetzen, ohne daß ſie deßwegen aufhören ſollten, einander proportionirt zu ſeyn; wie

Zum Exempel.

24 : 8 = 18 : 6.
24 : 18 = 8 : 6.
8 : 24 = 6 : 18.
8 : 6 = 24 : 18.
18 : 24 = 6 : 8.
18 : 6 = 24 : 8.
6 : 8 = 18 : 24.
6 : 18 = 8 : 24.

§. 79.

Hieraus fließt ganz deutlich die ſehr wichtige Haupteigenſchaft, daß das Produkt aus dem

dem erſten und vierten Glied, dem Produkte aus dem zweyten und dritten Glied beſtändig gleich ſeyn muß, oder daß das Produkt der beyden äußern Glieder dem Produkte der beyden innern Glieder gleich ſey. Z. Ex.

I. II. III. IV.

1 : 2 = 24 : 6.

I 8 × IV 6 = 48. oder II 2 × III 24 = 48.

§. 80.

Aus dieſer Haupteigenſchaft folgt ganz deutlich, daß, wenn die drey erſten Glieder einer geometriſchen Proportion gegeben ſind, man leicht das vierte finden könne. Denn man darf nur die beyden mittlern Glieder mit einander multipliciren, und mit dem erſten Glied in dieſes Produkt dividiren, ſo giebt der Quotient das vierte Glied. Z. Ex. Es ſeyen die drey erſten Glieder 8 : 2 = 24. zu : : fl. iſt das Produkt der beyden mittlen Glieder von
II III
2. 24 = 48. hierein mit dem erſten Glied = 8 dividirt, ſo giebt der Quotient 6 das geſuchte vierte Glied, und folglich iſt die geometriſche Proportion. 8 : 2 = 24 : 6. und hierauf beruhet der Grund der ſo berühmten Regel De-tri.

Neun-

Neunter Abſchnitt.

Von der Regel De-tri überhaupt.

§. 81.

Die Regel De-tri iſt diejenige Vorſchrift, nach welcher aus drey gegebenen Zahlen allezeit eine ſolche vierte Zahl geſucht wird, welche mit jenen in einer geometriſchen Proportion ſtehet, ſo, daß ſich die erſte Zahl verhalte zur zweyten, wie die dritte Zahl zur vierten.

§. 82.

Die Vorſchriften der Regel De-tri, wenn man dieſelbe überhaupts betrachtet, beſtehet darinn, daß man 1) die drey gegebenen Zahlen ſammt der unbekannten in eine ſolche Proportion bringe, damit das unbekannte Glied immer das vierte Glied werde; und

2) daß man alsdenn die beyden mittlern miteinander multiplicire, und mit der erſten in das Produkt dividire.

§. 83.

Die Vorſchriften der Regel De-tri, wenn man dieſelben inſonderheit betrachtet, ſind 1) daß man bey benannten Zahlen, welche hier vorzüglich vorkommen, die Glieder der Verhältniſſe, ſo dieſelben aus verſchiedenen Ein-

Einheiten beſtehen, in die kleinſten Einheiten von einerley Benennung verwandle; auch wenn Brüche vorkommen, dieſelbe einrichte. Z. Ex. Es beſtünde ein Glied aus Gulden, Kreuzer und Häller, ſo verwandle man ſolches in lauter Häller. Befindet ſich bey den Hällern ein Bruch, ſo multiplicire man ſolche mit dem Nenner des Bruches, addire den Zähler dazu, und ſetze den Nenner wieder darunter.

2) Muß das unbekannte Glied, wann man es gefunden hat, die nämliche Benennung bekommen, welche das dritte Glied hat. Z. Ex. Es ſey das dritte Glied Pfunde, ſo muß das vierte auch Pfunde ſeyn.

§. 84.

Die Regel De-tri wird in zwey Haupttheile abgetheilt, und heißt die erſte davon die einfache, oder eigentliche Regel De-tri; die andere hingegen die zuſammengeſetzte Regel De-tri.

§. 85.

Die einfache Regel De-tri nennt man diejenige, wenn drey Glieder aus einer einzigen Proportion gegeben ſind, und in welcher man das vierte unbekannte Glied ſuchen ſoll.

§. 86.

Die zuſammengeſetzte Regel De-tri beſteht darinn, wenn mehrere Glieder aus verſchiedenen Proportionen gegeben ſind, dazu ein oder mehrere unbekannte Glieder geſucht werden ſollen.

§. 87.

Die zuſammengeſetzte Regel De-tri wird wieder in drey beſondere Theile abgetheilt; als: 1) in die Regel von Fünfen, oder de Quinque, wenn fünf Glieder aus zwey verſchiedenen Proportionen gegeben ſind.

2) In die Ketten-Regel, wenn Glieder aus mehrern Proportionen gegeben ſind; und

3) In die Geſellſchafts-Rechnung, wenn Gewinn und Verluſt unter mehrern nach dem Verhältniß deſſen, was ſie zuſammen geſchoſſen haben, getheilt werden ſoll.

§. 88.

Dieſe letztere, nämlich die Geſellſchafts-Regel hat wieder ihre Unterabtheilungen; als:

a) Die Vermiſchungs-Regel, in welcher gefunden wird, wie viel aus den gegebenen Verhältniſſen einzelner Materien von jeder zu einer gegebenen vermiſchen Menge genommen werden muß; und

b) Die Falſi-Rechnung, in welcher die unbekannten Glieder der Proportionen nach ge-

gebenen Verhältniſſen willkührlich angenommen werden, ehe und bevor man ihre wahre Größe herausbringen kann.

§. 89.

Man theilt auch ſowohl die einfache als die zuſammengeſetzte Regel De-tri in die gerade und umgekehrte Regel De-tri ein. Die erſte begreift diejenigen Exempel in ſich, in welchen die drey gegebenen Glieder der Proportion ſo auf einander folgen, daß das unbekannte Glied das vierte Glied iſt. Die andere aber begreift diejenigen Exempel in ſich, in welchen die drey gegebenen Glieder erſt verſetzt werden müſſen, um das unbekannte Glied zum vierten machen zu können.

Zehnter Abſchnitt.

Von der einfachen Regel De-tri, und zwar, a) der geraden oder direkten Regel De-tri.

§. 90.

Die Exempel, welche in der geraden oder direkten Regel De-tri vorkommen, werden eingetheilt.

1) In ſolche, welche im erſten Grad 1 haben; und zwar mit einer ſolchen Benennung, die im zweyten Glied allein vorkommt; oder

oder unter welche das zweyte Glied gebracht werden kann; in dieſem Falle darf man nur das zweyte und dritte Glied mit einander multipliciren, ſo giebt das Produkt das vierte Glied, weil mit 1 nicht dividirt wird.

2) In ſolche, welche im zweyten und dritten Glied 1 haben, wo man alsdenn nur mit dem erſten Glied in das zweyte oder dritte Glied dividiren darf, weil mit 1 nicht multiplicirt wird; und

3) in ſolche, welche in allen gegebenen Gliedern mehrere Einheiten haben, wobey die beyden mittlere Glieder in einander multiplicirt werden müſſen, und das Produkt durch das erſte Glied dividirt werden muß.

Exempel zu Nro. 1.

Es koſtet 1 ℔. Coffee 1 fl. 28 kr.
Wie viel koſten 12 ℔. Coffee?
Das erſte Glied iſt 1.
Das zweyte ⸗ ⸗ 12.
Das dritte ⸗ ⸗ fl. — 52 kr.

Wenn man alſo das zweyte mit dem dritten multiplicirt, ſo giebt das Produkt 624 kr. oder 10 fl. 24 kr., und weil mit 1 nicht dividirt wird, ſo bleibt das Produkt die Antwort auf die vorgelegte Frage; und das Exempel wird ſtehen, wie folgt:

℔.	℔.	kr.	fl.	kr.
1 :	12 =	52 :	10.	24.

12
104
52
6|0|62|4 fl. 10. 24 kr.

2) Es koſte 1 ℔. Zucker 40 kr. wie hoch kommen 18 ℔. Zucker zu ſtehen? Antwort 10 fl. 20 kr.

3) Eine Elle Leinwand koſte 36 kr. was gelten $13\frac{1}{2}$ Ellen? Antwort 8 fl. 6 kr.

4) 1 ℔. Weinbeer koſte 20 kr. was koſten 2 Ct.? Antwort 66 fl. 40 kr.

℔.	Ct.	kr.	fl.	kr.
1. :	2 =	20 :	60 :	40.

200 ℔.
20.
6|0 400|0.
44

In dieſem Exempel müſſen die 2 Ct. erſt zu ℔. gemacht werden, da denn ſolche 200 ℔. geben, multiplicirt man dieſe mit dem dritten Glied, ſo iſt das Produkt 4000 kr. dieſe betragen nach der Reduction 66 fl. 40 kr., und weil mit 1 nicht dividirt wird, ſo iſt das geſuchte vierte Glied 66 fl. 40 kr.

5) Wenn 1 Loth $5\frac{3}{4}$ kr. koſtet; was koſten ℔. $26\frac{3}{4}$ Lt.? Antwort 11 fl. $45\frac{13}{16}$ kr.

Lt. ℔. Lt.
1 : 3 : $26\frac{3}{4} = 5\frac{3}{4}$ kr.

32. — 23
$122\frac{3}{4}$ — 4
491
4

491
23
1473
982 6|0
16| 11293|70|$5\frac{13}{16}$| 11 fl. $45\frac{13}{16}$ kr.
112
...93
80
13
16

6) Um 1 fl. hat man gekauft $\frac{5}{12}$ Ellen Tuch; wie hoch kommt $\frac{1}{4}$ Ellen zu ſtehen? Antwort $\frac{5}{48}$ fl.

7) Wenn eine Perſon des Tags $1\frac{2}{5}$ fl. — verzehrt; wie viel braucht dieſe Perſon in einem Jahr, oder in 365 Tagen? Antwort 511 fl. —

8) Ein Taglöhner verdient alle Tage $\frac{3}{5}$ fl. wie viel kann er in $11\frac{1}{2}$ Wochen, die Woche zu 6 Werkeltagen gerechnet, verdienen? Antwort $41\frac{2}{3}$ fl.

9) 1 Elle feines blaues Tuch um 11 fl. — wie theuer kommen $7\frac{1}{2}$ Ellen zu ſtehen? Antwort 82 fl. 30 kr.

10) 1 ℔. um 17 kr. wie theuer kommen 60 ℔.? Antwort 17 fl.

11) 1 Vierling ſchön Mehl um 40 kr. wie hoch kommt das Schaff? Antwort 21 fl. 20 kr.

12) 1 Fuder Wein um 310 fl. wie hoch kommen 6 Fuder? Antwort 1860 fl.

Exempel zu Nro. 2.

1) Es koſten 24 Ellen 50 fl. — was koſtet 1 Ellen? Antwort $2\frac{1}{12}$ fl.

Ellen		Ellen		fl.		fl.
24	:	1	=	50	:	$2\frac{1}{12}$.

2) 5 Ct. Coffee koſten 375 fl. — kr. was koſtet 1 Ct.? Antwort 75 fl — kr.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ct.} & & \text{Ct.} & & \text{fl.} & & \text{fl.} \\ 5 & : & 1 & = & 375 & : & 75. \\ & & & & 35 & & \\ \hline & & & & 25 & & \\ & & & & 25 & & \\ \hline & & & & .. & & \end{array}$$

3) 13 Eymer Wein koſten $422\frac{1}{2}$ fl. was gilt 1 Eymer? Antwort $32\frac{1}{2}$ fl.

4) $19\frac{3}{4}$ Schaff Roggen gelten 325 fl. $32\frac{3}{4}$ kr. was koſtet 1 Schaff Roggen? Antwort 16 fl. 29 kr.

5) 34 Pfund 3 Loth Flachs koſten 17 fl. $19\frac{55}{64}$ kr. was koſtet 1 Pf. Flachs? Antwort $30\frac{1}{2}$ kr.

6)

6) $\frac{7}{8}$ Ct. um $\frac{5}{6}$ fl., wie theuer kommt 1 Pf.? Antwort $1\frac{1}{20}$ fl.

7) Um 82 fl. 30 kr. bekommt man $7\frac{1}{2}$ Ellen, wie hoch kommt 1 Elle? Antw. 11 fl.

8) 1 Mark Silber koſtet 14 fl. 56 kr., wie theuer kommt 1 Loth? Antw. 56 kr.

9) 1 Schaff ſchön Mehl um 21 fl. 20 kr. was koſtet 1 Vierling? Antwort 40 kr.

10) 60 ℔. um 17 fl. —, was gilt 1 ℔.? Antwort 17 kr.

Exempel zu Nro. 3.

1) 5 Pf. koſten 12 fl., was koſten 15 Pf.? Antwort 36 fl. —

```
Pf.   Pf.    fl.   fl.
 5  :  15  = 12  : 36.
       12
     ------
       30
      15
   ---------
 5 : 180 | 36
      15
    -----
       30
```

2) 3 Centner, 57 Pfund, 19 Loth koſten 273 fl. — kr, wie kommen 3 Centner, 34 Pfund und 31 Loth zu ſtehen? Antwort $198\frac{3773}{10343}$ fl.

3) 7 Ellen um $9\frac{1}{2}$ fl., wie hoch kommen 91 Ellen? Antwort $123\frac{1}{2}$ fl.

4) $\frac{7}{8}$ Ellen um 15 fl. 27 kr. 4 hl., wie hoch kommen $\frac{15}{16}$ Ellen? Antw. 16 fl. 33 kr. 6 hl.

5) $\frac{5}{12}$ Pf. um $\frac{7}{12}$ fl., wie hoch $\frac{15}{16}$ Pf. Antw. 1 fl. 18 kr. 3 pf.

6) Um $\frac{3}{4}$ fl. bekommt man $\frac{4}{5}$ Pf. wie viel bekommt man um $\frac{5}{8}$ fl.? Antw. $\frac{2}{3}$ Pf.

7) 3 Ctr. 13 ℔. 2 Vierl. 4 Lt. um 315 fl. 24 kr., wie hoch kommen 34 Ctr. 49 ℔. 3 Vr. 4 Lt.? Antw. 3469 fl. 26 kr. 6 hl.

8) 14 ℔. um $18\frac{2}{3}$ fl., wie theuer ſind 60 ℔.? Antw. 80 fl.

§. 91.

4) Der umgekehrten Regel De-tri.

Nach der im §. 89. gegebenen Erklärung von der umgekehrten Regel De-tri beſteht dieſelbe darinn, daß man die drey gegebene Glieder erſt verſetze; um das unbekannte Glied zum vierten machen zu können.

Zum Exempel.

Es haben 20 Perſonen an einem Graben täglich 5 Ellen ausgegraben, wie viel braucht man Perſonen, daß an den Graben täglich 100 Ellen ausgegraben werden? Würde man

bey

bey dieſer Aufgabe die Glieder der Proportion in derjenigen Ordnung anſetzen, in welcher ſie gegeben ſind, und auf ſolche Weiſe das vierte Glied ſuchen, ſo gäbe der Quotient 25 Perſonen. Es iſt aber augenſcheinlich klar, daß 25 Perſonen nicht im Stande ſind, 100 Ellen auszugraben, da 20 Perſonen nur 5 Ellen ausgraben können. Man muß daher unterſuchen, welches Glied von den drey gegebenen in der Proportion fehlt; wobey es ſich nach genauer Ueberlegung zeigt, daß das zweyte Glied fehlt. Denn 5 Ellen verhalten ſich zu 100 Ellen, wie 20 Perſonen ſich verhalten zu der geſuchten Anzahl von Perſonen. Man ſetzt alſo das letzte Verhältniß voran, damit das fehlende Glied das vierte werde; und die Rechnung iſt demnach folgende:

Ellen		Ellen		Perſon.		Perſon.	
5	:	100	=	20	:	400	vierte
		20					unbekannte
5		2000		400			Glied.
		20					

2) 6 Taglöhner verfertigen in 8 Tagen eine gewiſſe Arbeit, wie lange haben 12 Arbeiter daran zu thun? Antw. 4 Tage.

3) 1000 Soldaten ſind auf 6 Monate verproviantirt, wie lange brauchen 500 Soldaten zu dieſem Vorrath? Antw. 12 Monate.

4)

4) 2 Schuhmacher verfertigen in einem Tage 3 Paar Schuhe. Es ſollen aber in einem Tag 50 Paar Schuhe fertig werden: wie viel braucht man hiezu Schuhmacher? Antw. 33 Schuhmacher.

Paar Paar Schuſter Schuſter
3 : 50 = 2 : 33.
2

3|100| 33 Schuſter.

5) Zu einem Kleid braucht man 5 Ellen Tuch, wenn daſſelbe $\frac{7}{4}$ Ellen breit iſt; wieviel Ellen aber werden erfordert, wenn daſſelbe nur $\frac{6}{4}$ Ellen beeit iſt? Antw. $5\frac{5}{6}$ Ellen.

6) Ein Bothe geht alle Tage 5 Meilen, und kommt in 12 Tagen an Ort und Stelle; ein anderer Both ſoll in 8 Tagen in dem nämlichen Ort eintreffen, wie viel Meilen muß derſelbe des Tags machen? Antw. $7\frac{1}{2}$ Meile.

Anmerkung.

Da nicht nur jedes Land, ſondern auch wohl oft eine jede Stadt ihr eigenes Maaß und Gewicht hat; und es doch öfters höchſt nothwendig iſt, daß man die Verhältniſſe gegen einander wiſſen muß, um die Maaße und Gewichte des einen Lands zu den Maaßen und Gewichten des andern Landes reduciren zu können, ſo ſind folgende Tabellen, worinnen die Verhältniſſe der Maaße angegeben ſind, ſehr nützlich; als

Ver:

Vergleichung der Schuhe verſchiedener Oerter nach dem Pariſer Schuh.

Wenn der Pariſer Schuh in 1440 gleiche Theile abgetheilt wird, ſo hat

der Achner	=	=	=	128, 5.
Amſterdamer		=	=	125, 0.
Anſpachen	=	=	=	132, 0.
Antwerper	=	=	=	126, 6.
Augsburger		=	=	131, 3.
Avignoner	=	=	=	110, 0.
Baſeler	=	=	=	132, 2.
Bayriſcher	=	=	=	128, 0.
Berliner	=	=	=	137, 3.
Berner	=	=	=	130, 1.
Bologner	=	=	=	168, 2.
Braunſchweiger		=	=	126, 5.
Bremer	=	=	=	128, 2.
Breslauer	=	=	=	126, 0.
Brüßeler	=	=	=	129, 0.
Cairo	=	=	=	245, 9.
China	=	=	=	147, 7.
Cleve	=	=	=	131, 0.
Cölner	=	=	=	122, 0.
Conſtantinopoler		=	=	314, 0.
Coppenhagner		=	=	139, 1.

der

der Cracauer	185, 0.
Dordrecher	159, 6.
Danziger	127, 2.
Dresdner	125, 5.
Egypner	245, 9.
Engländer	135, 1.
Frankfurter am Mayn	127, 0.
Frankreich	144, 0.
Genfer	216, 3.
Gibralter	125, 3.
Gießen	132, 0.
Griechiſcher	135, 8.
Gröninger	129, 5.
Hager, in Holland	144, 0.
Halle,	132, 0.
Hamburger	127, 0.
Hamburger	127, 0.
Hannover	128, 5.
Hebräiſcher	159, 0.
Heydelberger	123, 5.
Hildesheimer	124, 2.
Hollſteiner	132, 3.
Inſprucker	140, 8.
Königsberger	136, 4.
Leidener	139, 0.
Leipziger	125, 3.

der

der Lioner	151, 5.
Liſſaboner	150, 1.
Löwener	126, 6.
Londner	135, 1.
Lothringer	129, 1.
Lübecker	129, 0.
Lütticher	127, 5.
Manheimer	128, 6.
Mantuaner Bracci	206, 2.
Maynzer	133, 5.
Mechelner	123, 9.
Mecklenburger	129, 0.
Mildelburger	133, 0.
Münchner	128, 2.
Neapel, Palmi	116, 9.
Nürnberger	134, 7.
Oldenburger	131, 3.
Osnabrücker	123, 8.
Pariſer, Toises	864, 0.
Königl. Schuh	144, 0.
Perſien Arish	431, 0.
Pommernſcher	129, 5.
Prager	133, 8.
Rivaler	118, 7.
Rheinländiſcher	139, 1.

der

der Rigaiſcher	121, 5.
Römiſcher, Baucanne	990, 0.
— — Schuh.	120, 6.
— — Palm	99, 0.
— — alter Schuh	132, 0.
Roſtocker	128, 2.
Rotterdamer	138, 5.
Rußland	238, 6.
Sardinien	
Palm, di Sardegna	111, 3.
Cagliari	89, 8.
Schwediſcher, Faden	789, 6.
— — — Schuh	131, 6.
Spaniſcher, Schuh	125, 3.
— — — Palmos	94, 0.
Stettiner	125, 3.
Stockholmer	131, 6.
Strasburger	128, 3.
Stuttgarder	126, 8.
Turiner	143, 2.
Ulmer	128, 1.
Utrechter	121, 0.
Venediger	154, 0.
Veronaer	154, 0.
Wiener	142, 0.

der

der Wittenberger	148, 5.
Zeller	129, 2.
Züricher	133, 1.

Vergleichung der vornehmſten Europäiſchen Meilen.

Nach Geometriſchen Schritten zu 5 Schuh.

	Schritte.
Eine Rußiſche Meile	750.
— Italieniſche	1000.
— Engelländiſche	1250.
— kleine Franzöſiſche	2000.
— gemeine	2500.
— große	3000.
— Polniſche	3000.
— Spaniſche	3428.
— Schwediſche	5000.
— Däniſche	5000.
— Ungariſche	6000.
— Deutſche	4000.

Nach dem Rheinländiſchen Schuh.

	Rheinländ. Sch.
Eine Böhmiſche Meile mißt:	22017.
— Burgundiſche	18016.
— Churbraunſchweigiſche	33737.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

	Rheinländ. Sch.
Eine Däniſche Meile mißt :	24000.
— Deutſche oder Germaniſche	14197.
— : neue : :	20000.
— : gemeine : :	
— : Geometriſche :	23661.
— Franzöſiſcher (Leuke) :	7042.
— — (Lieue) :	14197.
— kleine von 2000 Toiſen :	12418.
— große von 2500 : :	15523.
— Großbrittaniſche, alte Brittiſche	7456.
— neue Engliſche zu 1760 Yards	513.
— Hamburger : : :	24000.
— Holländiſche : : :	18680.
— Irländiſche : : :	6536.
— Italieniſche : : :	5915.
— Londner von 1666⅔ Yards	4862.
— Polniſche : : :	17745.
— Portugieſiſche : :	19717.
— Preußiſche : : :	24700.
— Römiſche von 8 olymp. Stadien	4701.
— Rußiſche von 1500 Arſchin	3402.
— Sächſiſche Polizey : Meile von 16000 Dresdner Ellen	28878.
— Schleſiſche von 11250 Schleſiſchen Ellen : : :	20658.

Eine

	Rheinländ. Sch.
Eine Schottländiſche von 1147 franz. Klaftern	7119.
— Schwediſche von 18000 Schwed. Ellen.	34094.
— Schweizeriſche	26888.
— Spaniſche oder Kaſtilianiſche von 2147 franz. Klaftern	13328.
— Stadien Olympiſche	591.
— Ungariſche	26625.

Vergleichung der Ellen von verſchiedenen Oertern.

100 Pariſer Ellen machen

zu Amſterdam	$173\frac{1}{2}$.
— Antwerpen	$171\frac{3}{4}$.
— Avignon	100 -.
— Augsburg	$208\frac{3}{4}$.
— Baſel	$208\frac{3}{4}$.
— Barcellona	$72\frac{1}{4}$.
— Bergen	$190\frac{3}{4}$.
— Bern	$216\frac{2}{3}$.
— Bourdeaux	$101\frac{1}{2}$.
— Bretagne	$85\frac{3}{4}$.
— Bremen	$208\frac{3}{4}$.
— Breslau	$217\frac{1}{3}$.

zu Brüßel	171$\frac{3}{4}$.
— Cadix	138$\frac{3}{4}$.
— Cambray	159$\frac{1}{2}$.
— Caſtilien	138$\frac{3}{4}$.
— Cölln	208$\frac{3}{4}$.
— Conſtantinopel	178 –.
— Coppenhagen	194$\frac{3}{4}$.
— Dresden	206$\frac{1}{4}$.
— Drontheim	190 –.
— Dublin und Edinburg	130 –.
— Florenz	199 –.
— Genua	476$\frac{4}{11}$ Palmi.
10 Palmi machen in Seide	9 –.
in Wolle 8. in Leinwand	1 –.
— Frankfurt	208$\frac{3}{4}$.
— Genf	104 –.
— Harlem	173$\frac{1}{2}$.
— Hamburg	208$\frac{3}{4}$.
— Haag	174$\frac{1}{2}$.
— Oſtidien	260 –.
— Königsberg	208$\frac{3}{4}$.
— Lauſanne	111$\frac{1}{9}$.
— Leiden	173$\frac{1}{2}$.
— Leipzig	208$\frac{3}{4}$.
— Lenzburg	190$\frac{1}{2}$.
— Lille	169 –.

zu

zu Lion	ſ	ſ	ſ	102 –.
— Liſſabon	ſ	ſ	ſ	173$\frac{1}{2}$.
— Livorno	ſ	ſ	ſ	199 –.
— London in wollenen Stoffen			ſ	128 –.
ſ in Leinwand			ſ	100 –.
— Lübeck	ſ	ſ	ſ	208 –.
— Lucca	ſ	ſ	ſ	199 –.
— Lucern	ſ	ſ	ſ	208$\frac{3}{4}$.
— Madrit	ſ	ſ	ſ	138$\frac{3}{4}$.
— Mantua	ſ	ſ	ſ	182$\frac{1}{2}$.
— Marſeille	ſ	ſ	ſ	100 –.
— Meßing	ſ	ſ	ſ	59 –.
— Mayland in Wolle			ſ	177 –.
ſ in Seide			ſ	222$\frac{3}{4}$.
— Minden	ſ	ſ	ſ	288 –.
— Modena	ſ	ſ	ſ	182$\frac{1}{2}$.
— Montpellier		ſ	ſ	60 –.
— Nantes	ſ	ſ	ſ	85$\frac{3}{4}$.
— Neapel	ſ	ſ	ſ	101$\frac{1}{2}$.
— Neuſchatell		ſ	ſ	107 –.
— Norwegen		ſ	ſ	173$\frac{1}{2}$.
— Nürnberg		ſ	ſ	173$\frac{1}{2}$.
— Osnabrück		ſ	ſ	100 –.
— Palermo	ſ	ſ	ſ	59 –.
— Parma	ſ	ſ	ſ	214$\frac{3}{4}$.
— Picardie	ſ	ſ	ſ	145 –.

zu Prag	$198\frac{1}{2}$.
— Riga	$210\frac{1}{4}$.
— Rochelle	100 –.
— Rom in Wolle	$173\frac{1}{2}$.
in Leinwand	58 –.
— Rouan in Seide	100 –.
in Leinwand	$83\frac{1}{3}$.
— Rußland	164 –.
— St. Gallen in Leinwand	$149\frac{1}{4}$.
in Wollen	$194\frac{3}{4}$.
— Schweiz, Kanton	208 –.
— Smirna	175 –.
— Stockholm	199 –.
— Strasburg	208 –.
— Toulouſe	$66\frac{2}{3}$.
— Turin	$197\frac{1}{2}$.
— Valentia	130 –.
— Venedig in Tüchern	179 –.
in Gold- und Silberſtoff	190 –.
— Unterwalden, Uri	208 –.
— Ulm	$208\frac{3}{4}$.
— Wien	149 –.
— Zopfingen	100 –.
— Zürch	199 –.

Ver⸗

Vergleichung der Gewichte verſchiedener Oerter.

100 Pfund zu Genf machen

zu Achen	$117\frac{11}{16}$.	
— Alikante	110—.	
— Amſterdam	$111\frac{11}{16}$.	
— Antwerpen	$117\frac{11}{16}$.	
— Augsburg	$112\frac{3}{8}$.	ſchwer.
	$116\frac{11}{16}$.	leicht Gew.
— Baſel	$110\frac{1}{4}$.	
— Bautzen	$127\frac{1}{4}$	
— Bergamo	190.	leicht.
—	$76\frac{1}{4}$.	ſchwer.
— Bergen op Zoom	$119\frac{5}{8}$.	
— Berlin	$117\frac{7}{8}$.	
— Bern	$114\frac{3}{4}$.	
— Bologna	$152\frac{1}{16}$.	
— Bourdeaux	$112\frac{1}{4}$.	
— Bremen	$112\frac{1}{16}$.	
— Breslau	$136\frac{1}{8}$.	
— Braunſchweig	$118\frac{3}{16}$.	
— Brüßel	$117\frac{11}{16}$.	
— Cadix	$120\frac{15}{16}$.	
— Cölln	$118\frac{3}{16}$.	
— Conſtantinopel	$43\frac{1}{2}$.	
— Coppenhagen	$117\frac{5}{8}$.	

zu Cracau : :	$136\frac{1}{4}$.	
— Danzig : :	$126\frac{11}{16}$.	
— Dordrecht : :	$112\frac{1}{2}$.	
— Dublin : :	$109\frac{1}{8}$.	
— Dünkirchen :	$131\frac{13}{16}$.	
— Edimburg : :	$109\frac{1}{8}$.	
— Florenz : :	$162\frac{5}{8}$.	
— Frankfurt am Mayn	$118\frac{1}{8}$.	
— Gent :	$118\frac{1}{8}$.	
— Genua : :	$103\frac{1}{2}$.	ſchwer Gew.
: : :	$174\frac{1}{4}$.	leicht Gew.
— Halle : :	118 -.	
— Hamburg : :	$113\frac{3}{4}$.	
— Königsberg :	$144\frac{1}{16}$.	alt Gew.
: : :	$117\frac{1}{4}$.	neu Gew.
— Leipzig : :	$118\frac{3}{16}$.	
— Lille : :	$128\frac{1}{4}$.	
— Lindau : :	$120\frac{1}{8}$.	
— Lion : :	$131\frac{13}{16}$.	
— Liſſabon : :	$120\frac{3}{16}$.	
— Livorno : :	$161\frac{15}{16}$.	
— London : :	122 —.	
— Lübeck : :	$114\frac{1}{8}$.	
— Lüttrich : :	$118\frac{3}{4}$.	
— Lucca : :	$165\frac{3}{8}$.	
— Lüneburg : :	$113\frac{7}{16}$.	

zu

zu Madrit	ſ	ſ	$128\frac{1}{4}$.	
— Magdeburg		ſ	$17\frac{1}{2}$.	
— Mallaga	ſ	ſ	$120\frac{3}{16}$.	
— Mantua	ſ	ſ	$194\frac{5}{8}$.	
— Marſeille	ſ	ſ	$133\frac{3}{8}$.	
— Meßina	ſ	ſ	175—	leicht Gew.
ſ	ſ	ſ	64—	ſchwer.
— Modena	ſ	ſ	162—.	
— Montpellier		ſ	135—.	
— Moskau	ſ	ſ	$134\frac{7}{8}$.	
— München	ſ	ſ	$98\frac{3}{4}$.	
— Mexico	ſ	ſ	$120\frac{3}{8}$.	
— Nancy	ſ	ſ	$119\frac{1}{4}$.	
— Nantes	ſ	ſ	$111\frac{1}{2}$.	
— Neapel	ſ	ſ	$129\frac{15}{16}$.	
— Naumburg		ſ	$118\frac{1}{8}$.	
— Nürnberg	ſ	ſ	109—.	
— Palermo	ſ	ſ	175—	leicht Gew.
— Paris	ſ	ſ	$112\frac{1}{2}$.	
— Petersburg		ſ	135—.	
— Prag	ſ	ſ	$107\frac{3}{8}$.	
— Regensburg		ſ	$98\frac{3}{8}$.	
— Riga	ſ	ſ	$131\frac{15}{16}$.	
— Rochelle	ſ	ſ	$111\frac{1}{2}$.	
— Rom	ſ	ſ	$163\frac{7}{8}$.	leicht.
ſ ſ	ſ	ſ	$64\frac{1}{2}$.	ſchwer.

zu Rotterdam	$112\frac{1}{2}$.	
— St. Gallen	$94\frac{3}{8}$.	
— Salzburg	$98\frac{9}{16}$.	
— Schafhauſen	$120\frac{1}{16}$.	
— Smirna	$97\frac{7}{8}$.	
— Stettin	$123\frac{3}{4}$.	
— Stockholm	$131\frac{5}{8}$.	
— Strasburg	117 —.	
— Toulouſe	$132\frac{3}{4}$.	
— Trieſt	$98\frac{3}{16}$.	
— Turin	150 —.	
— Ulm	$117\frac{11}{16}$.	
— Valencia	$178\frac{1}{4}$.	
— Venedig	$115\frac{11}{16}$.	ſchwer
	183 —.	leicht
— Verona	$110\frac{15}{16}$.	ſchwer
	$166\frac{9}{16}$.	leicht
— Warſchau	146 —.	
— Wien	$98\frac{3}{16}$.	
— Wittenberg	$117\frac{15}{16}$.	
— Zittau	$117\frac{15}{16}$.	
— Zürch	$104\frac{3}{8}$.	
— Zurzach	105 —.	

Ver-

Vergleichung des alten jüdiſchen Längenmaaßes gegen den Pariſer Schuh.

Digitus, oder Finger : :	99, 41.
Palmus, oder Handbreit :	397, 64.
Spitama, Spanne : :	1192, 93.
Pes, Schuh : : :	1590, 57.
Cubitus communis, oder gemeine Elle : : :	2385, 85.
Cubitus ſacer, oder heilige Elle	2783, 49.

Vergleichung der alten jüdiſchen Münzen gegen unſer Reichsgeld.

Minutum : :	$\frac{9}{32}$ eines Pfennigs.
Quadrans : :	$\frac{9}{16}$ eines Pfennigs.
Aſſarius : :	$2\frac{1}{4}$ Pfennige.
Gerah : : :	2 Kreuzer, 1 Pfen.
Denarius, oder Drachma	11 Kreuzer, 1 Pfen.
Didrachma, oder Siclus profanus :	22 Kreuzer, 2 Pfen.
Siclus ſacer, oder Stater	45 Kreuzer. —
Minah, Mna, ein Pfund Silber :	25 Rchsthl.
Ein Pfund Gold : :	300 Rchsthl.
Ein Talent Silber :	1500 Rchsthl.
Ein Talent Gold : :	18000 Rchsthl.

Nach

Nach dieſen Tabellen können nach der Regel De-tri, wieviel eine gegebene Anzahl von Ellen, Pfunden u. ſ. w. eines Landes in einem andern Lande ausmachen, berechnet werden; und iſt hiebey folgende Regel zu beobachten, als:

Man ſchreibe diejenige Zahl, welche in der Tabelle vor jenem Lande ſteht, deſſen Ellen, Pfund u. ſ. w. man reduciren will, als das erſte Glied der Proportion: diejenige Zahl, welche in der Tabelle bey jenem Lande ſteht, zu deſſen Ellen, Pfunden, u. ſ. w. man die Reduction zu machen verlangt, ſetze man in die zweyte Stelle: die Anzahl der Ellen, Pfunde u. ſ. w., welche reducirt werden ſollen, ſchreibe man in die dritte Stelle; ſo wird das vierte Glied die geſuchte Anzahl der Ellen, Pfunde, u. ſ. w. geben. Bey der Reduction der Ellen, Pfunde und Meilen bedient man ſich der geraden Regel de Tri. Bey der Reduction der Schuhe aber der verkehrten Regel de Tri.

Erſtes Exempel in Ellen.

Ein Kaufmann hat zu Amſterdam 200 Ellen Tuch gekauft. Wieviel machen dieſe Augsburger Ellen? Antwort: $240\frac{220}{347}$ Augsburger Ellen.

Man ſchlage in der Tabelle von Ellen Amſterdam nach, ſo ſteht nebenbey die Zahl $173\frac{1}{2}$, welche man in die erſte Stelle ſetzen muß. In der

der nämlichen Tabelle ſuche man die Zahl, ſo neben Augsburg ſteht; ſo findet man $208\frac{3}{4}$; dieſe ſetze man in die zweyte Stelle. Die Anzahl der Ellen, ſo reducirt werden ſollen, nämlich 200, ſetze man an die dritte Stelle; ſo ſtehen die Glieder der Proportion alſo:

$173\frac{1}{2} : 208\frac{3}{4} = 200:$ und das vierte Glied wird nach der geraden Regel de Tri geſucht.

Amſterd. Augsb. Amſt. Ellen Augsb. Ellen.

$173\frac{1}{2} : 208\frac{3}{4} = 200 : 240\frac{220}{347}.$

Zweytes Exempel in Gewicht.

Ein Kaufmann zu London hat 320 ℔. Caffee gekauft; wieviel Pfunde, ſchwer Gewicht, hat er zu Augsburg? Antwort $294\frac{46}{61}$ ℔. Augsburger Pfunde ſchwer Gewicht.

Drittes Exempel in Meilen.

Wieviel machen 150 Däniſche Meilen deutſche Meilen? Antw. 125 deutſche Meilen.

Däniſche. Deutſche. Däniſche. Deutſche.

$24000 : 20000 = 150 : 125.$

Viertes Exempel in Schuhen.

Wieviel machen 112 Berliner Schuh in Augsburg? Antwort: $117\frac{155}{1312}$ Augsburger Schuh.

Die

Die Auflöſung nach der verkehrten Regel de Tri iſt demnach folgende:

Augsb.	Berlin.	Berlin.	Augsb.
1313 :	1373 =	112 :	$117\frac{155}{1313}$.

```
1313 : 1373
117 :  112
      2746
     1373
    1373
    153776
    1313..
     2247
     1313
      9346
      9191
       155
      1313
```

Fünftes Exempel in jüdiſchen Münzen.

Der heilige Marcus ſagt am zwölften Kapitel, die arme Wittwe habe zwey Minuta geopfert, wieviel beträgt dieſes in der Reichsmünze?

1 : 2 : : $\frac{9}{32}$: $\frac{18}{32}$ oder $\frac{9}{16}$ eines Pfennigs.

Bey Matthäus am 18 Kapitel heißt es, ein Knecht ſey ſeinem Herrn 10000 Talente ſchuldig geweſen. Wieviel beträgt dieſe Schuld in der Reichsmünze, wenn es Talente im Silber:

Silber: wieviel, wenn es Talente im Golde geweſen?

1 : 10000 : : 1500 : 15000000 Rchsthl.
1 : 10000 : : 18000 : 180000000 Rchsthl.

Eilfter Abſchnitt.

Von der zuſammengeſetzten Regel de Tri.

§. 92.

Im §. 87. iſt angezeigt worden, daß die zuſammengeſetzte Regel de Tri in drey beſondere Theile abgetheilt werden müſſe; und daß die Regel von Fünfen oder die Quinque den erſten Theil ausmache. Bey Berechnung der Exempel nach dieſer Regel von Fünfen iſt zweyerley zu beobachten, nämlich

1) werden aus den gegebenen fünf Gliedern drey Glieder, die zuſammengehören, in eine Proportion gebracht, und hiezu das vierte Glied berechnet. Alsdenn ſetzt man dieſes gefundene vierte Glied mit den beyden übrigen gegeben in eine andere Proportion, und ſucht hiezu wieder das vierte Glied. Oder

2) multiplicire man von den fünf gegebenen Gliedern zwey Glieder von einerley Benennung mit zwey andern ebenfalls von einerley Benennung, doch ſo, daß beyde Factoren ſich

ſich aufeinander als Urſachen und ihre Wirkungen beziehen: alsdenn ſetze man dieſe beyde Produkte mit den übrigen gegebenen Gliedern in eine Proportion, ſuche hiezu das vierte Glied, ſo iſt ſolches das Facit.

Hierauf gründet ſich die allgemeine Regel, wie die Exempel nach der Regel de Quinque angeſetzt werden müſſen; nämlich

Man ſetze beyde Fragzahlen am Ende untereinander, dasjenige, was mit dem geſuchten von einerley Art iſt, in die Mitte, und die beyden übrigen Zahlen vorne untereinander. Die beyden Fragzahlen ſowohl, als die beyden erſten Zahlen in der erſten Stelle multiplicire man in einander, ſo bekömmt man drey Zahlen, mit welchen man nach der ordentlichen Regel de Tri verfahren kann.

Einige Exempel werden dieſe Regel beſſer erläutern, als alle weitläufige Erklärung.

1) Exempel der geraden oder direkten Regel von Fünfen.

1) Ein Fuhrmann empfängt für 12 Centner auf 10 Meilen 5 fl. Fracht oder Fuhrlohn: wieviel muß er bekommen, wenn er 50 Ct. 24 Meilen weit führen muß? Antwort 50 fl. —

Nach

Nach der erſten Art.

10 Meilen : 24 Meilen = fl. 5 : fl. 12.
12 Cent. : 50 Cent. = fl. 12 : fl. 50.

Durch die erſte Proportion wurde gefunden: wieviel Gulden Fracht für 24 Meilen bezahlt werden müſſe, wenn 10 Meilen 5 fl. koſten. In der andern Proportion aber wurde berechnet, wieviel für 50 Centr. Fuhrlohn bezaht werden müßte, wenn für 12 Ct. 12 fl. Fracht bezahlt werden.

Nach der zweyten Art.

12 Centr. 50 Centr.
10 Meilen. 24 Meilen.

12 : 1200 = fl. 5 : fl. 50.
5

fl. 50. 600$\not{0}$
60

0

2) Ein Capital von 100 fl. trägt in einem Jahr 5 fl. Zins; wieviel machen 3000 fl. in 6 Jahren Zinſe? Antw. 900 fl. —

fl. Cap. fl. Cap. fl. Int. fl. Int.
100 : 3000 = 5 : 150.

fl. 150$\not{0}\not{0}$

Jahr Jahr fl. fl.
1 : 6 = 150 : 900.
6

900

3) Eine Perſon verzehrt in 4 Wochen 22 fl. 36 kr. 3 hl. wieviel verzehren ſechs Perſonen in einem Jahre? Antw. 1763 fl. 46 kr. 2 Pfennige.

4) 200 Soldaten koſten monatlich zu unterhalten 900 fl. — Wieviel braucht man, um 1 Jahr lang 12000 Mann zu unterhalten? Antw. 648000 fl.

5) Ein Stück Tapezerey, 8 Ellen lang, und 6 Ellen breit, wird mit 12 Gulden bezahlt. Wie hoch wird ein anderes dergleichen Stück kommen, das 20 Ellen lang, und 10 Ellen breit iſt?

Der Werth des Tuchs iſt die Wirkung; denn dieſer wird durch die Breite und Länge deſſelben verurſachet. Dieſe Aufgabe wird demnach aufgelöſet werden, wie folgt.

Länge	Breite	Gulden
8 :	6 :	12
20 :	10	

$8 \times 6 = 48$: : das erſte Produkt

$20 \times 10 \times 12 = 2400$ das zweyte Produkt.

$\frac{2400}{48} = 50$ der verlangte Werth.

6) Da ein Gang in einer Mühle binnen 1 Tag 12 Schaff mahlen kann; wieviel wird eine Mühle, die aus 18 Gängen beſteht, in einem Jahre, das iſt, in 365 Tagen Mehl liefern?

Die

Die Wirkung iſt die Anzahl der Schaffe, welche gemahlen werden. Die Auflöſung wird alſo dieſe ſeyn:

Gang	Tag	Schaff
1 :	1 :	12
18 :	365	

$1 \times 1 = 1$ das erſte Produkt

$12 \times 18 \times 365 = 78840$ das zweyte

$\frac{78840}{1} = 78840$ die verlangte Anzahl der Schaffe.

7) Sechs Wägen mit Wein beladen, 9 Meilen weit zu führen, koſten 72 Gulden. Wie groß wird alſo der Unkoſten ſeyn, wenn 27 dergleichen Wägen 15 Meilen weit ſollen geführet werden?

Der Fuhrlohn, 72 Gulden iſt die Wirkung, die Auflöſung geſchieht hiemit alſo:

Wägen	Meilen	Gulden
6 :	9 :	72
27 :	15	

$6 \times 9 = 54$ das erſte Produkt

$27 \times 15 \times 72 = 29160$ das zweyte

$\frac{29160}{54} = 540$ der geſuchte Fuhrlohn.

8) Wenn einem jeden Soldaten monatlich 4 Gulden gereichet werden, wie groß wird der Aufwand für 4000 Soldaten in 4 Jahren ſeyn?

Soldat	Monat	Gulden
1 :	1 :	4
4000	48	

$1 \times 1 = 1$ das erſte Produkt

$4000 \times 48 \times 4 = 868000$ das zweyte Prod.

$$\frac{768000}{1} = 768000$$ der geſuchte Aufwand

9) 100 Soldaten verzehren in 3 Wochen 21 Centner Fleiſch. Wie viele können mit 63 Centnern 5 Wochen lang erhalten werden?

Die Anzahl der Centner Fleiſch, welche verzehret werden, iſt die Wirkung. Die Aufloſung wird demnach dieſe ſeyn:

Soldaten	Woches	Centner
100 :	3 :	21
	5	63

$100 \times 363 = 18900$ das erſte Produkt

$5 \times 21 = 105$ „ „ das zweyte Produkt.

$$\frac{18900}{105} = 180$$ die geſuchte Anzahl der Soldaten.

10 Schnitter ſchneiden in 5 Tagen 30 Jaucharte. Wenn nun 25 gedungen werden, wie bald werden ſie mit 40 Jaucharten fertig ſeyn?

Die Anzahl der Jaucharten, die geſchnitten werden, iſt die Wirkung. Die Auflöſung geht demnach alſo:

Schnit-

Schnitter	Tage	Jaucharte
10 :	5 :	30
25 :		40

$10 \times 5 \times 40 = 2000$ das erſte Produkt
$25 \times 30 = 750$ das zweyte Prod.

$$\frac{2000}{7} = 2\tfrac{500}{750} = 2\tfrac{2}{3} \text{ Tage.}$$

11) Wenn eine gewiße Maaße Getreides um 96 Gulden gekauft wird, ſo můſſen die Bäcker aus obrigkeitlichen Befehle ein 3 Pfunde ſchweres Brod um 12 Kreuzer geben. Wie ſchwer muß alſo ein Brod fůr 30 Kreuzer ſeyn, da eben ſelbe Maaße Getreides um 165 Gulden gekaufet wird?

Der Werth des Brodes iſt die Wirkung. Die Auflöſung wird hiemit dieſe ſeyn:

Gulden	Pfund	Kreuzer
96 :	3 :	12
165 :		30

$96 \times 3 \times 30 = 8640$ das erſte Produkt
$165 \times 12 = 1980$ das zweyte Prod.

$$\frac{8640}{1980} = 4\tfrac{720}{1980} = 4\tfrac{4}{11}$$ die geſuchte Schwere.

12) Eine Stadt, in welcher 1000 Saldaten, iſt mit 200 Fäſſern Mehl auf 6 Monate genugſam verſehen: es werden ihr aber noch 80 dergleichen Fäſſer zugeſchickt, zugleich aber der Befehl, ſoviel Beſatzung noch dazu zu nehmen, daß ſie auf 7 Monate verſehen ſey.

 Die

Die Wirkung iſt die Anzahl der Fäſſer Mehl, welches von den Soldaten verzehret wird.

Soldaten		Fäſſer		Monate
1000	:	200	:	6
		280	:	7

$1000 \times 6 \times 280 = 1680000$ das erſte Prod.
$200 \times 7 = 400$ „ „

$$\frac{1680000}{1400} = 1200.$$ Die Anzahl der Soldaten, welche mit 280 Fäſſern auf 7 Monate können erhalten werden. Die Stadt muß alſo noch 200 Mann einnehmen.

13) Wenn eine Mauer, die 20 Schuhe lang, 11 Schnhe hoch, und $2\frac{1}{2}$ Schuhe dick, 400 Reichsthaler zu ſtehen kömmt; was wird eine andere dergleichen koſten, welche 36 Schuhe lang, 15 hoch, und 5 dicke werden ſoll?

Die Wirkung iſt der Werth der Mauer.

Länge	Höhe	Dicke	Reichsthaler
20	11	2,5	400
36	15	3	

$20 \times 11 \times 2{,}5 = 550$ das erſte Produkt
$36 \times 15 \times 3 \times 400 = 648000$ das zweyte

$$\frac{648000}{150} = 1178\tfrac{10}{55} = 1178\tfrac{2}{11}$$ Rchsthl.

b) Exem-

b) Exempel der umgekehrten Regel von Fünfen.

1) In einem Tage können mit einem Pflug 2 Jauchert Acker umgepflüget werden, wie viel braucht man Pflüge, um in 6 Tagen 144 Morgen umzuackern? Antw. 12 Pflüge.

Tage		Tage		Morgen		Morgen
1	:	6	=	2	:	12

Morgen		Morgen		Pflug		Pflüge
12	:	144	=	1	:	12

Oder

Morgen		Morgen		Pflug		Pflüge
2	:	144	=	1	:	72

Tage		Tag		Pflüge		Pflüge
6	:	1	=	72	:	12

2) Man brauche für 200 Soldaten monatlich 900 fl. —. Nun frägt es ſich, wie lange 12000 Mann Soldaten für 648000 fl. — kr. unterhalten werden können? Antw. 12 Monate.

§. 91.

In der zuſammengeſetzten Regel de Tri iſt nach §. 87. die Kettenregel, die Regel Multiplex, oder Conjointe die zweyte Unterabtheilung, und iſt hiebey zu beobachten, daß die Exempel der Kettenregel auf die nämliche Art, wie in der Regel von Fünfen, berechnet werden, blos mit dem einzigen Unterſchied, daß

darinn mehr als zwey Proportionen gemacht, oder welches einerley iſt, daß mehrere Paar Glieder derſelben in einander multiplicirt werden müſſen.

Die Regel, wornach die zur Kettenregel gehörige Exempel angeſetzt werden müſſen, iſt folgende:

Oben an ſchreibe man zur rechten Hand die Fragzahl; linker Hand aber ſetze man von den gegebenen Zahlen diejenige, welche mit der Fragzahl von einerley Art iſt; unter die Fragzahl rechter Hand diejenige Zahl, welche damit zu vergleichen iſt: desgleichen zur linken Hand diejenige Zahl, ſo mit der nächſt vorhergehenden Zahl zur rechten von einerley Art iſt, und zur rechten Hand wiederum die dritte in der Aufgabe verbunden. Man fahre damit ſo lange fort, bis endlich zur rechten Hand eine Zahl kömmt, die mit der geſuchten von einerley Art iſt.

a) Exempel der geraden Kettenregel.

1) Man umpflügt mit 2 Pflügen 9 Morgen Ackers in 3 Tagen, wenn des Tags 8 Stunden gepflüget werden; wie viel Land kann man mit 10 Pflügen in 6 Tageu umackern, wenn täglich 12 Stunden gepflügt wird? Antwort 135 Morgen.

Nach

Nach der erſten Art.

2 Pflüge: 10 Pflüge = 9 Morgen: 45 Morg.
3 Tage: 6 Tage = 45 Morgen: 90 Morg.
8 Stund: 12 Stund = 90 Morgen: 135 Morg.

Nach der andern Art.

2 Pflüge 10 Pflüge
3 Tage 6 Tage
8 Stund 12 Stunden

48: 720 = 9 Morgen: 135 Morgen.

2) Hamburg ſendet nach Leipzig 1000 Louisdor, welche in Leipzig 5 Rchsthl. gelten. Leipzig ſendet die Valuta zurück à 135 p. C. im Hamburger Bo. Man fragt, wie viel Hamburg für dieſe 1000 Louisdor in Mark Bo. bekomme? Antw. $11111\frac{1}{9}$ Mark Bo.

1 Louisdor. 1000 Louisdor.
135 Thlr. in Leipz. 5 Thlr. in Leipz.
27
9. 1. Thlr. Bo. 100 Thlr. Bo.
3 Mark Bo.

Divid. mit 9 | 100000
11111

$11111\frac{1}{9}$ Mark Bo.

3) Ein Capital von 560 rth. à 5 p. C. beträgt in 2 Jahren 56 rh. Intereſſe; wieviel trägt ein Capital von 2520 rth. à 6 p. C. in 50 Jahren Intereſſen? Antw. 756 rth.

darinn mehr als zwey Proportionen gemacht, oder welches einerley iſt, daß mehrere Paar Glieder derſelben in einander multiplicirt werden müſſen.

Die Regel, wornach die zur Kettenregel gehörige Exempel angeſeßt werden müſſen, iſt folgende:

Oben an ſchreibe man zur rechten Hand die Fragzahl; linker Hand aber ſetze man von den gegebenen Zahlen diejenige, welche mit der Fragzahl von einerley Art iſt; unter die Fragzahl rechter Hand diejenige Zahl, welche damit zu vergleichen iſt: desgleichen zur linken Hand diejenige Zahl, ſo mit der nächſt vorhergehenden Zahl zur red ten von einerley Art iſt, und zur rechten Hand wiederum die dritte in der Aufgabe verbunden. Man fahre damit ſo lange fort, bis endlich zur rechten Hand eine Zahl kömmt, die mit der geſuchten von einerley Art iſt.

a) Exempel der geraden Kettenregel.

1) Man umpflügt mit 2 Pflügen 9 Morgen Ackers in 3 Tagen, wenn des Tags 8 Stunden gepflüget werden; wie viel Land kann man mit 10 Pflügen in 6 Tageu umackern, wenn täglich 12 Stunden gepflügt wird? Antwort 135 Morgen.

Nach

Nach der erſten Art.

2 Pflüge : 10 Pflüge = 9 Morgen : 45 Morg.
3 Tage : 6 Tage = 45 Morgen : 90 Morg.
8 Stund : 12 Stund = 90 Morgen: 135 Morg.

Nach der andern Art.

2 Pflüge 10 Pflüge
3 Tage 6 Tage
8 Stund 12 Stunden

48 : 720 = 9 Morgen: 135 Morgen.

2) Hamburg ſendet nach Leipzig 1000 Louisdor, welche in Leipzig 5 Rchsthl. gelten. Leipzig ſendet die Valuta zurück à 135 p. C. im Hamburger Bo. Man fragt, wie viel Hamburg für dieſe 1000 Louisdor in Mark Bo. bekomme? Antw. 11111$\frac{1}{9}$ Mark Bo.

1. Louisdor.	1000 Louisdor.
135 Thlr. in Leipz.	5 Thlr. in Leipz.
27	
9. 1. Thlr. Bo.	100 Thlr. Bo.
	3 Mark Bo.

Divid. mit 9 | 100000
11111

11111$\frac{1}{9}$ Mark Bo.

3) Ein Capital von 560 rth. à 5 p. C. beträgt in 2 Jahren 56 rh. Intereſſe; wieviel trägt ein Capital von 2520 rth. à 6 p. C. in 50 Jahren Intereſſen? Antw. 756 rth.

560 Rchsthl.	2520 Rchsthl.
5 p. C.	5 p. C.
2 Jahr	5 Jahr

5600 : 75600 = 56 : 756 Rchsthl.

4) 7 Mk. 2 ß. courr. und die lagio von Bo. gegen courr. $18\frac{3}{4}$ p. C. wieviel Thlr. Bo. erhält man für 723 Ducaten? Antwort: 1446 Thlr. Bo.

Anmerkung.

Wenn Brüche, wie in dieſem Exempel vorkommen, ſo ſchafft man dieſelbe weg, und ſetzt:

1 Duc. giebt $7\frac{1}{8}$ Mk. courr.
folglich 8 Duc. geben 57 Mk. courr.

Weiter: 100 Mk. Bo. geben $118\frac{3}{4}$ Mk. courr. folglich 400 Mk. Bo. geben 475 Mk. courr.

Folglich kömmt die Berechnung zu ſtehen, wie folgt:

1	19
8 Duc.	57 Mk. courr.
95. 19	50
475 Mk. courr.	400 Mk. Bo.
	2
3 Mk. Bo.	1 Thlr. Bo.
1	
	723 Duc.
	2
	1446 Thlr. Bo.

b) Exem-

b) Exempel der umgekehrten Kettenregel.

1) Man kann mit 2 Pflügen in 3 Tagen 9 Morgen Acker umpflügen, wenn täglich 8 Stunden geackert wird. Wieviel Pflüge werden gebraucht, wenn man 135 Morgen Aecker in 6 Tagen und des Tags 12 Stunden umackern ſoll? Antw. 5 Pflüge.

1	15
~~9~~ Morgen	~~135~~ Morgen
2	
~~6~~ Tage	~~3~~ Tage
3	1
~~12~~ Stunden	~~8~~ Stunden.
6 : 30 =	5 Pflüge.

§. 92.

Die nach §. 87. beſtimmte dritte Abtheilung der zuſammengeſetzten Regel de Tri iſt die Geſellſchafts-Rechnung, worinn Gewinn und Verluſt unter mehreren nach dem Verhältniß deſſen, was ſie zuſammengeſchoſſen haben, getheilt wird.

§. 93.

Bey der eigentlichen Geſellſchafts-Rechnung überhaupt ſind folgende drey Punkte wohl in Acht zu nehmen, als:

1) daß

1) daß man die zuſammengelegten Gelder oder andere Sachen in eine Summe bringe;

2) dieſe Summe mit den eingelegten eines jeden von der Geſellſchaft und dem Gewinn, oder Verluſte in ſo viele Proportionen bringe, als Perſonen zu der Geſellſchaft gehören; und endlich

3) das vierte Glied in einer jeden dieſer Proportion ſuche.

§. 94.

Bey der Geſellſchafts-Rechnung insbeſondere iſt zu beobachten:

a) die einfache Geſellſchafts-Rechnung, worinn bey den Eingelegten keine verſchiedene Zeiten beſtimmt werden; und

b) die doppelte Geſellſchafts-Rechnung, wenn bey den Eingelegten verſchiedene Zeiten angegeben werden, welche Zeiten man vorher mit dem Eingelegten, als worauf ſie ſich beziehen, multipliciren muß.

Exempel der einfachen Geſellſchafts-Rechnung.

1) Drey Kaufleute, ihre Namen ſollen A, B und C ſeyn, ſchießen ein Capital von 1600 fl. zuſammen. A giebt 300 fl. — B giebt 500 fl. — und C giebt 800 fl. dazu her. Sie gewinnen mit dieſem Gelde 160 fl. — Wie groß iſt eines jeden Gewinn?

Man

Man addire das zuſammengeſchoſſene Geld, ſo iſt die Summe 1600 fl. — Nun ſuche man nach der Regel de Tri, indem man die Summe für das erſte Glied; die Summe der Einlage eines jeden für das zweyte Glied; den ganzen Gewinn für das dritte Glied annimmt, ſo giebt das vierte den Gewinn eines jeden Glied an. Hieraus entſpringen folgende drey Proportionen: als

1600 : 300 = 160 : 30 Gewinn des A.
1600 : 500 = 160 : 50 Gewinn des B.
1600 : 800 = 160 : 80 Gewinn des C.

2) Es tretten drey Perſonen in eine Compagnie, der erſte A giebt 7200 rth. der andere B giebt 5600 rth. und der dritte C giebt 6400 rth. Mit dieſem Gelde gewinnen ſie 5700 rth. wieviel bekömmt ein jeder von dem Gewinn? Antwort: A erhält 2160 rth. B 1680 rth. und C 1920 rth.

3) Vier Metzger vermiethen eine Wieſe um 120 fl. —. und weiden auf derſelben ihre Schafe. Einer davon hat 72 Stück: der andere 64 Stück; der dritte 48 Stück, und der vierte 30 Stück. Wieviel hat jeder an dem Zins zu bezahlen? Antwort: Der erſte 40 fl. 22 kr. $3\frac{47}{107}$ hl. der andere 35 fl. 53 kr. $2\frac{18}{107}$ hl. der dritte 26 fl. 54 kr. $7\frac{67}{107}$ hl. und der vierte 16 fl. 49 kr. $2\frac{32}{107}$ hl.

Exempel der gedoppelten Geſellſchafts-Rechnung.

1) Drey Kaufleute legen eine gewiße Summe zuſammen. Der erſte A giebt 800 fl. — kr. auf vier Monate, der andere B giebt 600 fl. auf ſechs Monate, und der dritte C 200 fl. auf drey Monate. Ihr Gewinn beträgt 150 fl. wieviel beträgt eines jeden Gewinn?

$$\begin{array}{rcl} 800 \times 4 & = & 3200 \\ 600 \times 6 & = & 3600 \\ 200 \times 3 & = & 600 \\ \hline \text{Summe} & & 4700 \end{array}$$

7400 : 3200 = 160 : $64\frac{32}{37}$ Gewinn des A.
7400 : 3600 = 150 : $72\frac{36}{37}$ Gewinn des B.
7400 : 600 = 150 : $12\frac{6}{37}$ Gewinn des C.

So wie der Gewinn, eben ſo wird auch der Verluſt gerechnet:

2) Vier Kaufleute nämlich A, B, C, und D befanden ſich auf einen Schiff, als plötzlich ſich ein Sturm erhob, und der erſte Kaufmann A genöthigt wurde, ſeine Güther, die auf 1000 rth. geſchälzt wurden, zur Erleichterung des Schiffes in das Meer zu werfen. Des zweyten B durch die Erleichterung des Schiffes erhaltene Güther belaufen ſich auf 4000 rth. des dritten C auf 6400 rth. und des vierten D auf 5600 rth. Der Eigenthümer des Schiffes E giebt ſeinen Werth auf 3000 rth. an. Wieviel muß ein jeder von den letzten Vieren dem erſten A geben, und wieviel muß dieſer ſelbſt einbüßen.

Man

Man addire alle Einlagen in eine Summe: ſo giebt ſolche 20000 rth. Der allgemeine Verluſt belauft ſich auf 1000 rth. Nun ſage man, wie die Summe aller Einlagen, zu der Einlage eines jeden, ſo verhält ſich der allgemeine Verluſt zu dem ſonderheitlichen Verluſt eines jeden.

Man bekömmt alsdenn folgende fünf Proportionen:

20000 : 1000 = 1000 : 60	Verluſt des erſt.	A.
20000 : 4000 = 1000 : 200	Verl. des zweyt.	B.
20000 : 6400 = 1000 : 320	Verl. des dritt.	C.
20000 : 5600 = 1000 : 280	Verl. des viert.	D.
20000 : 3000 = 1000 : 150	Verl. des fünft. E. des Schiffherrn.	E.

§. 95.

Nachdem die Berechnungsarten der Geſellſchafts-Regel ſowohl überhaupt als insbeſondere in den beeden vorhergehenden Paragraphen gelehrt worden, ſo iſt auch itzt noch zu zeigen übrig, wie die erſte Unterabtheilung der Geſellſchafts-Rechnung nämlich die Vermiſchungs-Rechnung berechnet werden müſſe, und iſt hiebey weiter nichts zu beobachten, weil die Exempel auf die vorhin beſchriebene Art gerechnet werden, als daß man die Gewichte oder Werthe der einzelnen Materien, die zu vermiſchen ſind, als etwas Eingelegtes, und eine gegebene Menge oder Größe des vermiſchten als ein Gewinn oder Verluſt betrachte.

Zum

Zum Exempel.

1) Zum Schießpulver wird auf 1 ℔. Salpeter 6 Loth Kohlen und 4 Loth Schwefel erfordert; wieviel muß man von jeder dieſer einzeln Materie nehmen, wenn man 50 ℔. Pulver machen will.

Salpeter	32	Loth
Kohlen	6	Loth
Schwefel	4	Loth
Summe	42	

$42 : 32 = 50 : 38\frac{2}{21}$ ℔. Salpeter.
$42 : 6 = 50 : 7\frac{3}{21}$ ℔. Kohlen.
$42 : 4 = 50 : 4\frac{16}{21}$ ℔. Schwefel.

Die Goldſchmiede und Silberarbeiter nennen den Tiegel beſchicken, wenn man ein gewißes Gewicht Gold und Silber von verlangtem Gehalte zuwäge bringen ſoll, und die Frage iſt, wieviel von jeder Art des Silbers oder Goldes auch andern Metalles dazu erfordert werde.

2) Ein Goldſchmied hat $37\frac{1}{2}$ Mk. $14\frac{1}{2}$ löthiges Silber, und will daſſelbe mit einem 9 löthigen Silber beſchicken, damit es $12\frac{1}{2}$ löthig werde. Wieviel muß er zu jenen $37\frac{1}{2}$ Mk. von dieſem andern Silber zuſetzen?

$12\frac{1}{2}$	$14\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	7
	9	2	4

$7 : 4 = 37\frac{1}{2}$ Mk. : $\frac{4 \times 37\frac{1}{2} \text{ Mk.}}{7}$

Dieß

Dieß giebt den Zuſatz $21\frac{3}{7}$ Mk.

Probe.

$37\frac{1}{2}$ Mk.	à $14\frac{1}{2}$ L. fein	thut	$543\frac{3}{4}$ L.
$21\frac{3}{7}$ Mk.	à 9 L. fein	thut	$192\frac{6}{7}$ L.
$58\frac{13}{14}$			$736\frac{17}{28}$

Folglich kommt $\frac{736\frac{17}{28}}{58\frac{13}{14}} = 12\frac{1}{2}$ Mk. für 1 Mk. des Gemiſchten.

Hieraus folgt die gemeine Regel:

Man ſchreibe den beſſern und ſchlechtern Preis unter einander, und den verlangten mittlern Preis zur Linken. Zur Rechten ſetze man bey dem beſſern Preis den Unterſchied des ſchlechtern vom mittlern, und beym ſchlechtenPreis den Unterſchied des beſſern vom mittlern: ſo zeigen dieſe Differenzen das Verhältniß der Theile, ſo man ſucht, an.

§. 96.

Die Verbindungs-Regel iſt diejenige Vermiſchungs-Rechnung, in welcher man verſchiedene Weine, Getränke u. d. gl. untereinander zu miſchen lehrt. Es giebt zwo Gattungen dieſer Regel; die eine heißt die mittlere, die andere hingegen die wechslende.

§. 97.

In der mittlern Verbindungs-Regel ſucht man den Werth einer gewißen Maaße der gan-

zen Miſchung aus der beſondern Maaßen und Werthen der Sachen, welche vermiſcht worden ſind: und die Rechnung wird auf folgende Art verrichtet:

Man addire alles, was untereinander ſoll vermiſcht werden, in eine Summe, wie auch alle beſondere Werthe in eine andere Summe. Alsdenn ſage man: wie ſich verhält die erſte Summe zu der andern Summe, ſo verhält ſich eine gewiße Maaße der Vermiſchung zu ihrem Werth.

§. 98.

Die wechſelnde Verbindungs-Regel hat drey verſchiedene Fälle: als

Erſter Fall. Man giebt den Werth einer gewißen Maaße einer jeden Sache, die in die Miſchung kommen ſoll: man giebt auch den Werth der nämlichen Maaße der Miſchung. Man ſucht daraus, wieviel von einer jeden Sache in die Miſchung kommen müſſe.

Zweyter Fall. Wenn die Werthe aller Sachen, welche untereinander gemiſcht werden ſollen, der Werth der ganzen Miſchung und überdas die Maaße einer Sache, die in die Miſchung kömmt, gegeben ſind, zu finden, wieviel von allen übrigen Sachen in die Miſchung kommen muß.

Dritter Fall. Wenn der Werth der Miſchung, die Werthe der zuvermiſchenden Dinge, und

und noch dazu die Maaße der ganzen Miſchung gegeben ſind, die Maaße finden für jede Sache, die in die Miſchung kommen ſoll.

Exempel von der mittleren Verbindungs-Regel.

Es ſollen 15 Schaff Waizen mit 12 Schaff Roggen vermiſcht werden. Das Schaff Waizen 7 fl. — Das Schaff Roggen 5 fl. — Wieviel wird ein Schaff des vermiſchten Getraides werth ſeyn?

Man addire 15 zu 12, ſo iſt die Summe 27. Multiplicire man 15 mit 7, ſo iſt das Produkt 105, der Werth des Waizens, der in die Miſchung kömmt. Man multiplicire 12 mit 5, ſo iſt 60 das Produkt des Werths des Roggens, der in die Miſchung kömmt. Addirt man beyde Produkte, ſo iſt die Summe 165 der Werth aller Sachen, welche vermenget werden. Nun ſage man: $27 : 165 = 1 : 6\frac{1}{9}$. Dieſes iſt der Werth eines gemiſchten Schaffes.

Exempel von der wechſelnden Verbindungs-Regel auf den erſten Fall.

Ein Weinwirth hat viererley Wein, welche er untereinander miſchen will. Die Maas des erſtern koſtet 20 kr. die Maas des zweyten 18 Kreuzer, die Maas des dritten 10 kr. und die Maas des vierten 11 kr. Wieviel muß er von

 jedem

jedem Wein nehmen, daß eine gemiſchte Maas 15 kr. iſt.

Man vergleiche erſtens den um 20 kr. und den um 11 kr. mit dem mittlern um 15 kr. der Miſchung; wie folgt:

15	20	15 — 11	= 4
	11	20 — 15	= 5

Zweytens vergleiche man den um 18 kr. und den um 10 kr. mit dem mittleren Werth 15 kr. der Miſchung;

15	18	15 — 10	= 5
	10	18 — 15	= 3

woraus folgt: daß von dem Wein zu 20 kr. 4 Maas; von dem um 11 kr. 5 Maas; von dem um 18 kr. 5 Maas; und endlich von dem um 10 kr. 3 Maas genommen werden müſſen, um eine Maas der Miſchung, ſo 15 kr. werth ſeyn ſoll, zu bekommen.

Exempel für den zweyten Fall.

Wieviel Weine, deſſen eine Maas 60 kr. gilt, muß unter 12 Maas eines andern Weines geſchüttet werden, deſſen eine Maas 42 kr. koſtet, damit eine Maas der Miſchung 52 kr. werth ſey?

Nach der vorhergehenden Auflöſung würde das Exempel ſtehen:

der

der mittlere Werth 52 | 60 | 52 — 42 = 10
 | 42 | 60 — 52 = 8

Nun ſage man: wie ſich die Maas, welche man durch die genommene Differenzen für jene Sachen genommen hat, deren Maas ſchon vorher gegeben war, verhält zu eben dieſer gegebenen Maas; ſo verhält ſich die Maas, welche man für die andere Differenzen gefunden hat, zu dem wahren Maas eben dieſer Sache: die Proportion muß alſo ſtehen;

8 : 12 = 10 : 15 dem verlangten Maas des beſſern Weines.

Exempel auf den dritten Fall.

Man ſoll einen Wein, davon eine Maas 60 kr. gilt, mit einem andern Wein, deſſen eine Maas 42 kr. koſtet, ſo vermiſchen, daß die ganze Miſchung 27 Maas ausmacht, und eine Maas dieſer Miſchung 52 kr. Werth ſey. Wieviel muß man von einem jeden nehmen?

Der mittlere Werth der Miſchung 52 | 60 | 52 — 42 = 10
 | 42 | 60 — 52 = 8

die Summe = 18

Nun ſage man 18 : 27 = 10 : 15
und 18 : 27 = 8 : 12

Von dem beſſern müſſen alſo 15 Maas, vom ſchlechtern hingegen 12 Maas genommen wer-

werden: ſo iſt die ganze Miſchung 27 Maas, und eine Maas iſt 52 kr. werth.

§. 99.

Die Falſi-Rechnung, welche nach §. 88. die zweyte Unterabtheilung der Geſellſchafts-Rechnung iſt, wird auf eben dieſe Weiſe, wie die eigentliche Geſellſchafts-Rechnung gerechnet, wenn nur ſtatt der unbekannten Größe des Eingelegten, Zahlen geſetzt werden, welche gegeneinander die gegebenen Verhältniſſe haben.

Zum Exempel.

Es ſoll ein Gewinn von 200 fl. — unter drey Kaufleute getheilt werden; davon der eine zu der Summe, daraus dieſer Gewinn entſtanden, ſoviel als die beyden andern zuſammen: der andere aber noch einmal ſoviel als der dritte gegeben, wieviel bekömmt ein jeder?

Man nehme zuerſt drey willkührliche Zahlen an, welche die gegebenen Verhältniſſe des Eingelegten gegeneinander haben, davon nämlich die erſte ſo groß iſt, als die beyden andern zuſammen genommen, und die andere noch einmal ſo groß als die dritte, z. Ex. 3, 2, 1, oder 6, 4, 2, oder 30, 20, 10. Dieſe Zahlen zeigen die Verhältniß an, nach welchen der Gewinn getheilt werden muß. Denn die erſte iſt ſo groß, als die beyden andern zuſammen; die andern aber noch einmal ſo

groß,

groß, als die dritte. Daher kann man dieſelbe eben ſo gut, als ob man wüßte, wieviel ein jeder wirklich eingelegt hat, brauchen, um die gehörige Theile des Gewinnes nach obigen Regeln zu finden. Die Rechnung iſt alſo:

Angenommene Einlage	des erſten	=	3
	des zweyten	=	2
	des dritten	=	1
	Summe	=	6

6 : 3 =	fl. 200 :	fl. 100	Gewinn des erſten
6 : 2 =	fl. 200 :	fl. $66\frac{2}{3}$	ꝛ ꝛ ꝛ des zweyten.
6 : 1 =	fl. 200 :	fl. $33\frac{1}{3}$	ꝛ ꝛ ꝛ des dritten

2) Einer hat ein Stück Tuch; davon verkauft er $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{8}$ behält noch 2 Ellen übrig, iſt die Frage, wieviel das ganze Stück gehalten? Antw. 48 Ellen.

3) Es fragt einer den andern, wie weit Augsburg von Venedig liege; der giebt zur Antwort: wenn es noch ſo weit, halb ſo weit, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{8}$ ſo weit wäre, und 5 Meilen dazu, ſo wären es gerade 212 Meilen; frägt ſich demnach, wie weit beyde Städte von einander liegen? Antw. 72 Meilen.

Zwölfter Abſchnitt.

Von den Quadratzahlen und von Ausziehung der Quadratwurzel.

§. 100.

Das herausgekommene Produkt, wenn man eine Zahl in ſich ſelbſt multiplicirt, nennt man eine Quadratzahl; die Zahl aber, welche in oder mit ſich ſelbſt multiplicirt worden iſt, heißt die Quadratwurzel.

§. 101.

Der Grund dieſer Benennung iſt aus der Geometrie genommen, wo man den Inhalt eines Quadrat findet, wenn man die Seite deſſelben mit ſich ſelbſt multiplicirt.

§. 102.

Die Quadratzahlen der natürlichen Zahlen laſſen ſich aus folgendem Wurzeltäfelein leicht einſehen, als

Wurzel.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadratzahl.	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Hieraus folgt, daß die Quadratzahl einer einfachen Zahl aus mehr nicht als zweyen Ziffern beſtehen könne, weil die Quadratzahl von 10 als der kleinſten doppelten Zahl ſchon

aus drey Ziffern beſteht; weil nämlich das Quadrat von 10 ſchon 100 ausmacht; aus gleichem Grunde kann die Quadratzahl von zwey Zahlen nicht mehr denn vier Ziffern in ſich enthalten, weil 100 ſchon 10000 in Quadrat hat, u. ſ. w.

§. 103.

Die Quadratwurzel aus einer gegebenen Quadratzahl ausziehen, heißt nichts anders, als diejenige Zahl finden, die durch ſich ſelbſt multiplicirt die gegebene Quadratzahl ausmacht.

Zum Exempel.

Es ſoll aus der Quadratzahl 16 die Quadratwurzel ausgezogen werden, das heißt, man ſoll diejenige Zahl finden, die in ſich ſelbſt multiplicirt genau 16 hervorbringe.

§. 104.

Die Quadratzahl, deren Wurzel aus zwey Theilen beſteht, enthält in ſich,

1) das Quadrat des erſten Theils,
2) das Quadrat des zweyten Theils, und
3) das doppelte Produkt aus dem erſten Theile in den zweyten Theil.

Zum Exempel.

Es ſey die Wurzel 25 oder 20 + 5. Multiplicirt man nun jeden Theil durch beyde,

ſo erhält man in dem Produkt das Quadrat des erſten Theils, und das doppelte Produkt des erſten im zweyten, und endlich das Quadrat des zweyten Theils.

$$\begin{array}{l} \quad 20 + 5 \\ \quad 20 + 5 \\ \hline 400 + 100 \\ \qquad\;\; + 100 + 25 \\ \hline 400 + 200 + 25 = 625, \end{array}$$

welches die Quadratzahl von 25 iſt.

Eben dieſer Satz läßt ſich auch anwenden, wenn man eine einfache Zahl in zwey andere zerfällt.

Zum Exempel.

Es ſey die Zahl 5 gegeben. Man theile dieſelbe in zween Theile, etwa in 3 und 2, Das Quadrat von 3, nämlich 9 hält in ſich das Quadrat des erſten Theils, und von 2 iſt das Quadrat des zweytens Theils, nämlich 4, und das doppelte Produkt aus 3×2, nämlich 12: denn $9 + 4 + 12 = 25$.

§. 105.

Beſteht die Wurzel aus mehr als zwey Zahlen, ſo kann man die erſten zwey oder mehrere derſelben als eine anſehen, und es wird alsbald klar, daß jedes Quadrat die Quadrate aller Theile der Wurzel, und die Produkte aus jedem Theile zweymal genommen in alle die übrigen,

übrigen, ſo vor ihm gegen die linke Hand ſtehen, in ſich enthalten.

§. 106.

Aus einer gegebenen Quadratzahl die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflöſung.

Man theile 1) die gegebene Quadratzahl von der rechten Hand gegen die linke Hand in Klaſſen, und gebe jeder Klaſſe zwey Ziffern; denn ſoviel Theile hat die Wurzel, als Klaſſen herauskommen. In der letzten Klaſſe gegen die linke Hand kann auch eine Ziffer ſtehen.

2) Das größte Quadrat, ſo in der erſten Klaſſe enthalten iſt, ziehe man von der erſten Klaſſe ab; die Wurzel aber ſchreibe man zur Seiten, als den erſten Theil der verlangten Quadratwurzel, hinter die Quadratzahl.

3) Zu dem Reſte, ſo nach der Subtraction geblieben iſt, ſetze man die nächſtfolgende Klaſſe. Den erſten ſchon gefundenen Theil der Quadratwurzel multiplicire man mit 2. Hierauf dividire man den gebliebenen Reſt ſammt der angehängten zweyten Klaſſe, doch ſo, daß man die letzte Ziffer derſelben niemal zum Dividendus rechne. Den Quotienten ſchreibe man zur Seite als den zweyten Theil der geſuchten Wurzel, wie auch zur rechten Hand neben den Diviſor.

4) Mul-

ſo erhält man in dem Produkt das Quadrat des erſten Theils, und das dorpelte Produkt des erſten im zweyten, und endlich das Quadrat des zweyten Theils.

$$\begin{array}{l}
\quad 20 + 5 \\
\quad 20 + 5 \\
\hline
400 + 100 \\
\qquad\;\; + 100 + 25 \\
\hline
400 + 200 + 25 = 625,
\end{array}$$

welches die Quadratzahl von 25 iſt.

Eben dieſer Satz läßt ſich auch anwenden, wenn man eine einfache Zahl in zwey andere zerfällt.

Zum Exempel.

Es ſey die Zahl 5 gegeben. Man theile dieſelbe in zween Theile, etwa in 3 und 2, Das Quadrat von 3, nämlich 9 hält in ſich das Quadrat des erſten Theils, und von 2 iſt das Quadrat des zweytens Theils, nämlich 4, und das doppelte Produkt aus 3×2, nämlich 12: denn $9 + 4 + 12 = 25$.

§. 105.

Beſteht die Wurzel aus mehr als zwey Zahlen, ſo kann man die erſten zwey oder mehrere derſelben als eine anſehen, und es wird alsbald klar, daß jedes Quadrat die Quadrate aller Theile der Wurzel, und die Produkte aus jedem Theile zweymal genommen in alle die

übrigen,

übrigen, ſo vor ihm gegen die linke Hand ſtehen, in ſich enthalten.

§. 106.

Aus einer gegebenen Quadratzahl die Quadratwurzel auszuziehen.

Aufloͤſung.

Man theile 1) die gegebene Quadratzahl von der rechten Hand gegen die linke Hand in Klaſſen, und gebe jeder Klaſſe zwey Ziffern; denn ſoviel Theile hat die Wurzel, als Klaſſen herauskommen. In der letzten Klaſſe gegen die linke Hand kann auch eine Ziffer ſtehen.

2) Das groͤßte Quadrat, ſo in der erſten Klaſſe enthalten iſt, ziehe man von der erſten Klaſſe ab; die Wurzel aber ſchreibe man zur Seiten, als den erſten Theil der verlangten Quadratwurzel, hinter die Quadratzahl.

3) Zu dem Reſte, ſo nach der Subtraction geblieben iſt, ſetze man die naͤchſtfolgende Klaſſe. Den erſten ſchon gefundenen Theil der Quadratwurzel multiplicire man mit 2. Hierauf dividire man den gebliebenen Reſt ſammt der angehaͤngten zweyten Klaſſe, doch ſo, daß man die letzte Ziffer derſelben niemal zum Dividendus rechne. Den Quotienten ſchreibe man zur Seite als den zweyten Theil der geſuchten Wurzel, wie auch zur rechten Hand neben den Diviſor.

4) Mul-

4) Multiplicire man den Diviſor nebſt dem angehängten zweyten Theile der Wurzel durch eben dieſen zweyten Theil, und das Produkt ziehe man von der zweyten Klaſſe ab. Bleibt

5) ein Reſt, ſo ſetze man zu denſelben die dritte Klaſſe, und wiederhole man alles vorgeſagte; und dieſes ſo lange, bis keine Klaſſe mehr herabzuſetzen übrig iſt.

Zum Exempel.

Man ſoll die Quadratwurzel von 1764 finden.

Man theile dieſe Zahl in zwo Claſſen ab, indem man nach den zweyen Zahlen 64 einen Strich macht. Man ſuche hierauf in dem Wurzeltäfelein das Quadrat, welches der erſten Klaſſe 17 entweder gleich iſt, oder doch am nächſten kommt; ſo wird man 16 finden. Dieſe Quadratzahl ſchreibe man unter die erſte Claſſe. Die darüber ſtehende Wurzel 4 ſchreibe man hinter einen aufrecht gezogenen Strich, als den erſten Theil der Wurzel. Unter 16 ziehe man einen Querſtrich; ſubtrahire 16 von 17, und ſetze den Reſt 1 unter den gezogenen Querſtrich. Neben dieſen Reſt ſetze man die folgende Claſſe, ſo hat man 164. Hierauf multiplicire man den erſten Theil der Wurzel mit 2, und das Produkt 8 ſchreibe man unter die Ziffer 6. Alsdenn dividire

dividire man 16 durch 8; den Quotienten 2 ſchreibe man neben den vorerſt gefundenen erſten Theil der Wurzel, wie auch neben 8, hieraus entſteht 82. Dieſes multiplicire man durch den andern Theil, nämlich durch 2, ſo giebt das Produkt 164. Zieht man dieſes von 164 ab, ſo bleibt nichts übrig; folglich iſt 42 die Quadratwurzel der gegebenen Zahl 1764, und die ganze Rechnung ſteht, wie folgt:

17	64.	$\sqrt{42}$
16		
1	64	
	82	
1	64	
	0.	

Ein anders Exempel.

Man ſoll die Quadratwurzel aus der Zahl 20449 ausziehen. Nach gemachter Eintheilung ſteht die gegebene Zahl alſo: 2 | 04 | 49 | $\sqrt{}$. Die erſte Claſſe 2 findet man nicht unter den Quadratzahlen. Das nächſte kleinere Quadrat iſt 1; man ſchreibe alſo dieſes unter die erſte Klaſſe 2. Die Wurzel davon, welche ebenfalls 1 iſt, ſchreibe man hinter den erſten Theil der Wurzel, wie man unten ſieht. Ziehe man 1 von 2 ab: neben dem Reſte 1 ſetze man die nächſte Claſſe: hieraus entſteht 104. Den gefundenen erſten Theil der Wurzel multiplicire

tiplicire man mit 2: das Produkt 2 ſchreibe man unter die 0. Dividire man 10 durch 2. Nun iſt 2 in 10 zwar 5mal enthalten: wenn man aber dieſen Quotient als den zweyten Theil der Wurzel annimmt, und neben den Diviſor 3 ſchreibt, ſo entſteht 25, und ſo man dieſes durch dieſen zweyten Theil der Wurzel 5 multiplicirt, ſo erhält man das Produkt 125, welches größer iſt, als daß man es von der zweyten Claſſe abziehen könnte. Man erkennt alſo, daß 5 zu groß iſt, und daß man nur 4 als den andern Theil der Wurzel annehmen müſſe: ſchreibe man alſo 4 neben den zuvor gefundenen erſten Theile der Wurzel, wie auch neben den Diviſor 2. Man bekommt alſo 24. Dieſes multiplicire man durch 4: das Produkt 96 ziehe man von 104 ab: zu dem Reſte 8 ſetze man die noch übrige dritte Claſſe. Hieraus entſteht 849. Multiplicire man beyde bisher gefundene Zahlen der Wurzel, nämlich 14 durch 2. Das Produkt 28 ſchreibe man unter 849 ſo, daß die letzte Ziffer 9 leer bleibe. Dividire man 84 durch 28, und ſage: 2 in 8 iſt 4mal enthalten. Aber wenn man dieſes als den dritten Theil der Wurzel nimmt, und auf die vorgeſchriebene Art verfährt, ſo bekommt man ein Produkt, das man nicht abziehen kann. Man erkennt alſo, 4 ſey zu groß, und ſchreibe 3 als den dritten Theil der Wurzel neben die zwo vorigen Wurzelzahlen, wie auch neben den Diviſor 28. Hieraus entſteht 283: wenn man dieſes mit 3 multi-

pliciret,

pliciret, und das Produkt 849 abzieht, bleibt nichts übrig. Alſo iſt 143 die geſuchte Wurzel. Hier ſieht man die ganze Bearbeitung.

2	04	49 $\sqrt[2]{143}$
1		
1	04	
	8	49
	2	83
	8	49
	·	··

§. 107.

Die Urſache dieſer Regel muß aus dem, was oben iſt geſagt worden, hergeleitet werden. Ich will es in dem erſten oben ſtehenden Exempel, ſo viel es ſeyn kann, erklären. In der erſten Claſſe 17 iſt das Quadrat des erſten Theils der Wurzel enthalten, und noch etwas weniges darüber: die Wurzel des größten Quadrats, welcher von dieſer erſten Claſſe abgezogen werden kann, iſt alſo der erſte Theil der verlangten Wurzel. Und, wenn man das Quadrat ſelbſt von der erſten Claſſe abzieht, ſo muß in dem Reſte ſammt der dazu geſetzten zweyten Claſſe das Produkt aus dem doppelten erſten Theile durch den zweyten, und überdas das Quadrat des zweyten Theils verborgen liegen. Nun befindet ſich das Quadrat

des

des zweyten Theils in der letzten Ziffer. Das doppelte Produkt iſt alſo in den zweyen erſten. Man muß folglich dieſe zwey erſten Ziffern durch den doppelten erſten Theil dividiren, und alsdenn giebt der Quotient den zweyten Theil. Denn, wenn ein Produkt, das aus zwoen durch einander multiplicirten Zahlen entſtanden iſt, durch eine derſelben dividirt wird, ſo muß der Quotient allezeit die andere geben.

Anmerkung.

Wenn es ſich zuträgt, daß ein Reſt ſammt der angehängten neuen Claſſe das doppelte der zuvor gefundenen Wurzel niemal in ſich begreift, ohne die letzte Ziffer dieſer neuen Claſſe dazu zu nehmen, ſo muß gleich eine 0 in die Wurzel geſchrieben, und auch die nächſtfolgende Claſſe herabgeſetzt werden. Man ſehe hier ein Exempel:

4	12	09	$\sqrt{203}$
4			
*	12	90	
	4	ø3	
	12	09	
	**	**	

Hier ſind noch einige Exempel zur Uebung.

18	19	02	25 $\sqrt{4265}$
16			
2	19		
	8~~2~~		
1	64		
55	02		
8	4~~6~~		
50	76		
426	25		
85	25		
426	25		
0			

38	39	76 $\sqrt{62}$
36		
2	93	
~~1~~	~~22~~	
2	44	
	49	76
	~~12~~	~~44~~
	49	76
	0	

1	01	20	36 $\sqrt{1006}$
1			
0	01	20	36
		~~20~~	~~06~~
	1	20	36
		0	

§. 108.

Wenn, nachdem man die letzte Claſſe ſchon herabgeſetzt hat, nach der Subtraction ein Reſt überbleibt, ſo hat die gegebene Zahl keine genaue Quadratwurzel: jedoch kann man derſelben ſo nahe kommen, als immer beliebig iſt; indem man allezeit zum Reſte zwo Nullen ſetzt, und neue Ziffern für die Wurzel zu ſuchen

 fort-

fortfährt, welche alsdenn Decimalzahlen ſind, und alſo von den Ganzen durch ein Strichlein müſſen abgeſondert werden.

Zum Exempel.

38	94	89 √ 624, 0905				
36						
2	94					
1	22					
2	44					
·	50	89				
	12	44				
	49	76				
	1	13	00	00		
	1	12	48	09		
	1	12	32	81		
	·	··	67	19	00	00
			12	48	18	05
			62	40	90	25
			4	78	09	75 Reſt.

§. 109.

Di? Probe, ob richtig gerechnet worden, anzuſtellen, muß man die gefundene Wurzel durch ſich ſelbſt multipliciren. Zu dem Productio addire man den Reſt, wenn am Ende der Rechnung einer geblieben iſt. Kommt die

vor=

vorgegebene Quadratzahl heraus, ſo iſt die Rechnung richtig.

§. 110.

Bey Ausziehung der Quadratwurzel aus einem vorgebenen Bruch iſt weiter nichts zu erinnern, als daß ſowohl aus dem Nenner als Zähler die Quadratwurzel ausgezogen werden müſſe.

§. 111.

Es ſind zwey Circel gegeben. Der Durchmeſſer des einen hat 5 Zolle; der Durchmeſſer des andern hingegen 10 Zolle. Die Quadratfläche des erſtern hält 19, 635 Quadratzolle: wie groß wird die Quadratfläche des andern Circels ſeyn?

Auflöſung.

Es iſt aus der Geometrie bekannt, daß die Circelflächen ſich gegeneinander verhalten, wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer: daher ſtelle man die Proportion folgendermaßen an: wie ſich das Quadrat 25 von 5 zu dem Quadrat 100 von 0 verhält, ſo verhält ſich die Fläche des erſten Circels zur Fläche des andern Circels.

25 : 100 = 19,635 : 78,54 Quadratzolle.

§. 112.

Die Magdeburgiſchen Halbkugeln, deren Durchmeſſer 1 Schuh oder 12 Zolle groß iſt, halten, nachdem die Luft rein iſt herausgezogen worden, mit einer Gewalt von 1715 Pfunden zuſammen: wie ſtark werden zwo andere Halbkugeln zuſammenhalten, derer Durchmeſſer 8 Zolle hat?

Die Kraft, mit welcher dergleichen Kugeln zuſammenhalten, verhält ſich, wie ihre Cirkelflächen; und dieſe verhalten ſich, wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer. Man ſtelle alſo dieſe Proportion an. Wie ſich das Quadrat von 12, das iſt 144, verhält zum Quadrat von 8, das iſt, zu 64, ſo verhalten ſich 1715 Pfunde zur Gewalt, mit welcher die Halbkugeln von 8 Zollen im Durchmeſſer zuſammenhalten.

144 : 64 = 1715 : 762 Pfunde beynahe.

Wenn alſo zwo dergleichen Magdeburgiſche Halbkugeln vorgewieſen werden, ſo kann man alſogleich durch die Rechnung beſtimmen, wie groß die Kraft ſeyn werde, mit der ſie nach herausgezogener Luft zuſammenhalten. Man darf nämlich nur erforſchen, wie groß ihr Durchmeſſer iſt. Iſt dieſer bekannt, ſo kann man aus der ſchon vorhin bekannten Kraft, mit welcher die Halbkugeln von einem Schuh im Durchmeſſer zuſammenhangen, die Kraft, mit der die vorgelegten

zuſam-

zuſammengedrückt werden, auf eben erklärte Art beſtimmen.

§. 113.

Ein Stein oder anderer Körper, wenn er freygelaſſen wird, fällt mit ſolcher Geſchwindigkeit, daß er innerhalb 1 Secunde 181 Zolle durchläuft. Nun aber iſt aus der Naturlehre bekannt, daß die Raume, welche von frey herabfallenden Körpern durchlaufen werden, ſich wie die Quadrate der Zeiten verhalten, durch welche die Bewegung dauert. Man fragt alſo: wie weit ein ſolcher Stein kommen würde, wenn er 2 und $\frac{1}{2}$ Stunden oder 9000 Secunden lang fallen ſollte. Folglich wie ſich das Quadrat von 1 zum Quadrate von 9000 verhält, ſo verhalten ſich 181 Zolle zum geſuchten Raume, den ein ſolcher Körper innerhalb $2\frac{1}{2}$ Stunden durchlaufen würde.

1 : 81000000 = 181 : 14661000000 Zolle.

Wenn man nun dieſe in Schuhe verändert, ſo findet man 1221750000: dividirt man dieſe Zahl durch 20000, weil eine deutſche Meile 20000 Schuhe in ſich begreift, ſo bekommt man $61087\frac{1}{2}$ Meilen. Weil nun der Mond nicht mehr dann 46440 deutſche Meilen von uns entfernt iſt, ſo folgt, daß, wenn ein Stein $2\frac{1}{2}$ Stunden lang frey fallen ſollte, er einen größern Raum durchlaufen

würde, als die Entfernung des Mondes von unſrer Erde iſt.

§. 114.

Das Licht, ſo von einem Körper ausfährt, wird immer ſchwächer, je größer die Entfernung von ſelbem Körper wird. Ja es iſt ein in der Weltweisheit erwieſener Satz, daß die Stärke des Lichts jederzeit abnehme, wie das Quadrat der Entfernung wächſt. Nun wird folgende Frage geſtellt. Durch zwo angezündete Kerzen wird ein gewiſſes Bild genugſam erleuchtet, daß man es in der Entfernung von 5 Schuhen klar und deutlich ſehen kann: wie viel dergleichen Kerzen müſſen angezündet werden, daß eben dieſes Bild in der Entfernung von 15 Schuhen eben ſo hell in die Augen falle? Man ſage: Wie ſich das Quadrat von 5 verhält zum Quadrate von 15, ſo verhalten ſich 2 Kerzen zur geſuchten Anzahl.

$$25 : 225 = 2 : 18.$$

§. 115.

69696 Mann ſollen ins Gevierte geſtellet werden, wie viel Mann werden in eine Reihe kommen? Man ziehe die Quadratwurzel aus 69696: ſo findet man 264.

§. 116.

§. 116.

Ein großes Quadratfeld hält 760384 Quadratſchuhe, wie lang iſt eine jede Seite von dieſem Felde? Antw. 872 Schuhe.

Dreyzehnter Abſchnitt.

Von den Cubiczahlen und Ausziehung der Cubicwurzel.

§. 117.

Die Cubiczahl iſt diejenige Zahl, welche entſteht, wenn man die Quadratzahl nochmals mit ihrer Wurzel multiplicirt. Die Zahl, daraus die Cubiczahl entſprungen, nennt man die Cubicwurzel.

§. 118.

Die Cubicwurzel aus einer gegebenen Cubiczahl ausziehen, heißt nichts anders, als diejenige Zahl finden, die durch ihre Quadratzahl multiplicirt, die gegebene Cubiczahl hervorbringt.

§. 119.

Die Cubiczahlen der natürlichen Zahlen läßt ſich aus folgendem Wurzeltäfelein leicht einſehen: als

Wurz.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubicz.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

§. 120.

Eine Zahl, welche aus mehr nicht als dreyen Ziffern beſteht, kann in ihrer Wurzel nicht mehr als eine Ziffer haben; denn die Zahl 10, welche die erſte mit zweyen Ziffern iſt, hat für ihre Cubiczahl 1000, welche ſchon aus vier Ziffern beſteht. Eben ſo kann eine Zahl, die nicht mehr als ſechs Ziffern hat, in ihrer Cubicwurzel nicht mehr als zwey Ziffern haben; denn 100, als die erſte Zahl mit dreyen Ziffern hat in ihrer Cubiczahl ſchon ſieben Ziffern, nämlich 1000000 u. ſ. w.

§. 121.

Die Cubicwurzel einer Zahl, die nicht mehr als drey Ziffern hat, findet man in der angeſetzten Tabelle §. 119. Steht die gegebene Cubiczahl in der untern Reihe der Cubiczahlen, ſo iſt die darüberſtehende Zahl ihre Cubiczahl. Iſt aber die gegebene Zahl nicht in der Reihe der Cubiczahlen anzutreffen, ſo iſt dieſelbe keine vollkommene Cubiczahl, und hat keine genaue Cubicwurzel.

§. 122.

Aus Zahlen, die mehr als drey Ziffern haben, die Cubicwurzel ausziehen, iſt ſchon beſchwer-

ſchwerlicher, doch wird die Berechnung erleich= tert, wenn man ſich folgenden Grundſatz ge= nau bekannt macht.

Wenn man was immer für eine Zahl, z. E. 7 in zween Theile zergliedert, z. E. in 4 und 3, ſo wird der Cubus derſelben Zahl in ſich begreifen, erſtens den Cubus des erſten Theils: zweytens den Cubus des zweyten Theils: drittens das Produkt aus dem drey= fachen Quadrate des erſtens Theils durch den zweyten multiplicirt: viertens endlich das Pro= dukt aus dem dreyfachen Quadrate des zwey= ten Theils durch den erſten Theil multiplicirt. Alſo begreift 343 der Cubus von 7 in ſich erſtens 64 den Cubus des erſten Theils 4: zweytens 27 den Cubus des zweyten Theils 3: drittens 144 das Produkt aus 48 dem dreyfachen Quadrate des erſtens Theils 4 durch den zweyten Theil 3 multiplicirt. Viertens endlich 108 das Produkt aus 27 dem drey= fachen Quadrate des zweyten Theils 3 durch den erſten Theil 4 multiplicirt. Denn 64 + 27 + 144 + 108 = 343.

§. 123.

Aus einer gegebenen Cubiczahl die Cu= bicwurzel ausziehen.

Erſtens: Theile man die gegebene Zahl in Claſſen ab, von der Rechten gegen die Linke, und gebe jeder Claſſe drey Ziffern, die

erſte ausgenommen, welche zuweilen nur aus einer oder aus zweyen Ziffern beſtehen kann. Soviel man Claſſen bekommt, ſoviel Ziffern muß die Wurzel haben (§. 119).

Zweytens: Suche man in der Wurzeltabelle Cubiczahlen (§. 119.) den größten Cubus, welcher in der erſten Claſſe enthalten iſt. Ziehe dieſen von der erſten Claſſe ab. Die Wurzel dieſes Cubus ſchreibe man hinter einen gezogenen Verticalſtrich. Solchergeſtalt hat man den erſten Theil der verlangten Wurzel.

Drittens: Zu dem Reſte, welcher nach der Abziehung geblieben iſt, ſetze man die nächſte Claſſe herab. Multiplicire den erſten ſchon gefundenen Theil der Wurzel durch ſich ſelbſt, und das hieraus entſtandene Quadrat durch 3: das Produkt ſchreibe man als einen Diviſor unter den beſagten Reſt ſammt der angehängten zweyten Claſſe, doch alſo, daß die zwey letzten Ziffern der neu herabgeſetzten Claſſe leer bleiben, und nicht mit zur Diviſion gebraucht werden. Alsdenn dividire man gewöhnlichermaßen: der Quotient iſt der zweyte Theil der Wurzel.

Viertens: Multiplicire man den Diviſor durch den Quotienten: das Produkt ſchreibe man alſo darunter, daß die letzte Ziffer deſſelben unter die erſte Ziffer der neu herabgeſetzten Claſſe zu ſtehen komme. Multiplicire man wieder

den

den neu gefundenen Quotienten durch ſich ſelbſt, hernach durch 3, endlich durch den ſchon vorher gefundenen Theil der Wurzel: das Produkt ſchreibe man alſo darunter, daß die letzte Ziffer deſſelben unter der zweyten Ziffer der neu herabgeſetzten zweyten Claſſe zu ſtehen komme. Multiplicire man endlich den neu gefundenen Quotienten zweymal durch ſich ſelbſt: das Produkt ſchreibe man alſo darunter, daß die letzte Ziffer deſſelben unter die letzte Ziffer der zweyten Claſſe zu ſtehen komme.

Fünftens: Addire man dieſe drey Produkte zuſammen: die Summe ziehe man von dem gebliebenen Reſte ſammt der angehängten zweyten Claſſe ab. Wenn man nun, von dem dritte Punkte der Regel angefangen, bey den noch übrigen Claſſen alles wiederholet, ſo erhält man die verlangte Cubicwurzel.

Zum Exempel.

Welche iſt die Cubicwurzel der Zahl 47437928? Man theile die gegebene Zahl in ihre Claſſen ab, wie man unten ſieht. Suche man in der Tabelle der Cubiczahlen den größten Cubus, welcher von der erſten Claſſe 47 kann abgezogen werden. Man findet 27: ſchreibe man dieſe 27 unter 47: die Wurzel 3 aber, ſo in beſagter Tabelle oberhalb 27 ſteht, ſchreibe man zur Rechten der gegebenen Zahl hinter den Strich. Ziehe man 27 von 47 ab; zu dem Reſte 20 ſetze man die nächſte Claſſe herab.

ab. Man bekommt 20437. Nun multiplicire man den erſten ſchon gefundenen Theil der Wurzel, nämlich 3, durch ſich ſelbſt: das Produkt 9 multiplicire man mit 3: das Produkt 27 ſchreibe man unter den Reſt ſammt der angehängten zweyten Claſſe alſo, daß die letzte zwey Ziffern 37 leer bleiben: dividire man nun 204 durch 27: den Quotient 6 ſchreibe man als den zweyten Theil der geſuchten Wurzel hinter dem Striche neben den zuvor gefundenen erſten Theil. Multiplicire man den Diviſor 27 durch dieſen neu gefundenen zweyten Theil 6: das Produkt 162 ſchreibe man alſo unter den Reſt ſammt der angehängten zweyten Claſſe, daß die letzte Ziffer 2 unter 4 zu ſtehen komme. Multiplicire man dieſen zweyten Theil 6 durch ſich ſelbſt: das Produkt 36 multiplicire man durch 3: das Produkt 108 multiplicire man durch den erſten Theil 3: das Produkt 324 ſchreibe man alſo darunter, daß die letzte Ziffer 4 unter 3 zu ſtehen komme: multiplicire man endlich den zweyten Theil durch ſich ſelbſt: das Produkt 36 wieder durch 6: den Cubus 216 ſchreibe man alſo unter die zweyte Claſſe, daß die letzte Ziffer unter dem letzten derſelben zu ſtehen komme: addire man alle drey alſo erhaltene Produkte zuſammen: die Summe iſt 19656: dieſe ziehe man von der zweyten Claſſe ab: ſo bekommt man einen neuen Reſt 781. Neben dieſen ſchreibe man die dritte Claſſe: und man bekommt 781928.

Muſ-

Multiplicire man den bisher gefundenen Theil der Wurzel nämlich 36 durch ſich ſelbſt, das Produkt 1296 durch 3: durch das Produkt 3888 dividire man den gebliebenen Reſt ſammt der angehängten dritten Claſſe, doch ſo, daß die zwo letzten Ziffern 28 nicht mit zur Diviſion genommen werden, mit einem Worte: dividire man 7819 durch 3888. Der Quotient iſt 2: dieſen ſchreibe man als den dritten Theil der Wurzel neben die zween vorigen Theile: mit eben dieſem 2 multiplicire man den Diviſor 3888: das Produkt 7776 ſchreibe man unter die dritte Claſſe, doch alſo, daß die letzten zwey Ziffern derſelben frey bleiben. Multiplicire man den eben gefundenen Theil der Wurzel, nämlich 2 durch ſich ſelbſt, das Produkt 4 multiplicire man mit 3: das Produkt 12 multiplicire man mit dem ſchon zuvor gefundenen Theile der Wurzel, nämlich mit 36: das Produkt 432 ſchreibe man alſo unter, daß die letzte Ziffer der dritten Claſſe frey bleibe. Endlich multiplicire man den letzt gefundenen zweyten Theil der Wurzel, nämlich 2 durch ſich ſelbſt, das Produkt 4 abermal durch 2, das Produkt 8 ſchreibe man unter, alſo, daß die letzte Ziffer deſſelben (wenn es aus mehrern beſteht) unter der letzten Ziffer der dritten Claſſe zu ſtehen komme: addire man alle drey alſo erhaltene Produkte zuſammen: die Summe iſt 781928, dieſe, wenn man abzieht, ſo bleibt kein Reſt. 362 iſt alſo die verlangte Wurzel.

47	437	928	$\sqrt{}$ 362
27			
20	437		
2	7		
16	2		
3	24		
	216		
19	656		
•	781	928	
	788	8	
	777	6	
	4	32	
		8	
	781	928	
		0	

Erſte Anmerkung. Man hat in eben angezogenem Exempel bey der zweyten Claſſe, da man 204 durch 27 dividirt hat, 6 als den Quotienten angenommen. Nun iſt 27 in 204 nicht nur 6mal enthalten. Allein, wenn man 7 als den Quotienten angenommen, und alsdenn nach der vorgeſchriebenen Regel die drey gehörigen Producte geſtaltet, und zuſammen addirt hätte, ſo würde man eine Summe erhalten haben, welche von der zweyten Claſſe nicht hätte können abgezogen werden. Aus welchem man dann würde geſchloſſen haben, der Quotient 7 ſey zu groß. Und dieſe Regel muß man allezeit merken: wenn aus den

dreyen

dreyen Produkten eine Summe entſteht, welche größer iſt, als die Claſſe, von der ſie ſoll abgezogen werden: ſo iſt der Quotient zu groß genommen worden.

Zweyte Anmerkung. Wenn eine neuerdings herabgeſetzte Claſſe durch das dreyfache Quadrat des zuvor gefundenen Theils der Wurzel nicht kann dividirt werden, ohne die vorletzte Ziffer dieſer neuen Klaſſe mit zum Dividendus zu rechnen, ſo muß man alſobald eine Nulle in der Wurzel ſchreiben, und alsdenn die nächſtfolgende Claſſe auch herabſetzen.

Zum Exempel.

8	365	427	$\sqrt{}$ 203
8			
	365	427	
	120	0	
	360	0	
	5	40	
		27	
	365	427	
	0		

Die Urſache dieſer vorgeſchriebenen Regel gründet ſich auf jenen Grundſatz, den man §. 122. vorangeſchickt hat. In der erſten Claſſe einer gegebenen Zahl iſt der Cubus des erſten Theils der Wurzel enthalten, und insgemein

gemein noch etwas darüber. Man muß alſo die Wurzel aus dem darinn verborgenen Cubus ausziehen, den Cubus ſelbſt aber von der erſten Claſſe ſubtrahiren. In dem Reſte ſammt der erſten Ziffer der zweyten Claſſe iſt enthalten das Produkt aus dem dreyfachen Quadrate des erſten Theils durch den zweyten multiplicirt: man muß alſo dieſen Reſt ſammt der erſten Ziffer der neuen Claſſe durch das dreyfache Quadrat des erſten Theils der Wurzel dividiren, damit man den zweyten Theil bekommt. Die zwey letzten Ziffern darf man nicht mit zur Diviſion gebrauchen, weil dieſe für die zwey andere Produkte gehören, die noch in dieſer zweyten Claſſe ſtecken müſſen. Man muß endlich die drey in der Regel angezeigten Produkte machen, ſelbe addiren, und alsdenn von der zweyten Claſſe abziehen, weil alle dieſe Produkte gemäß dem Grundſatze §. 122. in dieſer zweyten Claſſe enthalten ſeyn müſſen.

Erſte Anmerkung. Wenn man die Cubicwurzel aus einem Bruche ausziehen ſoll, ſo ziehe man die Wurzel beſonders aus dem Zähler, und alsdenn aus dem Nenner.

Zweyte Anmerkung. Wenn man in Ausziehung der Cubicwurzel am Ende, da keine Claſſe mehr herabzuſetzen übrig iſt, einen Reſt bekommt, ſo iſt die gegebene Zahl kein genauer Cubus, und kann alſo keine genaue

Cubic-

Cubicwurzel gefunden werden. Doch kann man derſelben nicht nahe kommen, als immer beliebig iſt; indem man immen 3 Nullen zum Reſte hinzuſetzt, und neue Ziffern für die Wurzeln nach der Vorſchrift der Regel ſucht, welche alsdenn Decimalziffern ſind, und von den Ganzen durch ein Strichlein müſſen abgeſöndert werden.

Dritte Anmerkung. Da dieſe Art, die Cubicwurzel auszuziehen, vielen ziemlich beſchwerlich ſcheinen wird, ſo ſoll alſo noch eine in etwas veränderte folgen.

Die drey erſten Punkte beobachte man, wie in der Regel iſt vorgeſchrieben worden. Nachdem man alſo den zweyten Theil der Wurzel gefunden hat, multiplicire man die ganze bis dahin gefundene, und alſo aus zweyen Ziffern beſtehende Wurzel durch ſich ſelbſt: das Produkt multiplicire man noch einmal durch die ganze bis dahin gefundene Wurzel. Das Produkt ziehe man von den zwoen erſten Claſſen der gegebenen Zahl ab. Zum Reſte ſetze man die dritte Claſſe herab, und wiederhole man abermal die ganze Arbeit, vom dritten Punkte angefangen, bis zum Ende.

Es ſey das oben angeſetzte erſte Exempel wieder vorzunehmen. Die Wurzel der erſten Claſſe iſt 3. Nach abgezogenem Cubus 27 bleibt der Reſt 20: und wenn die nächſte Claſſe dazu geſetzt wird: entſteht 20437. Den

zweyten Theil der Wurzel zu finden, muß man gemäß der Anfangs gegebenen Regel 204 durch 27 dividiren. Der Quotient iſt 6. Nun multiplicire man 36 durch 36: das Produkt 1296 abermal durch 36: das Produkt 46656 ziehe man von den erſten zwoen Claſſen der gegebenen Zahl ab, nämlich von 47437: zum Reſte 781 ſetze man die dritte Claſſe, und man bekommt 781928. Um den dritten Theil zu finden, verfahre man, wie in der erſten Regel vorgeſchrieben worden: hat man dieſen, nämlich 2 gefunden, ſo multiplicire man 362 durch 362: das Produkt 131044 abermal durch 362: das Produkt 47437928 ziehe man von der gegebenen Zahl ab; ſo bleibt kein Reſt. Alſo iſt 362 die verlangte Wurzel. Man ſehe hier die ganze Bearbeitung.

47	437	928	$\sqrt{362}$
27			
20	437		
2	7		
46	656		
	781	928	
	388	8	
	47437	928	
		0	

§. 124.

Mehrere Kugeln verhalten ſich ihrem körperlichen Inhalte, und, wenn ſie von der … näm-

nämlichen Materie ſind, nach ihrer Schwere nach, wie die Cubus ihrer Durchmeſſer. Nun wiegt eine eiſerne Kugel von einem Schuhe oder 12 Zollen im Durchmeſſer beynahe 288 Pfunde. Wie viel wird alſo eine andere gleichfalls eiſerne Kugel wägen, welche im Durchmeſſer 7 Zolle hat?

Man ſage: wie ſich der Cubus von 12, nämlich 1728 zum Cubus von 7 verhält, ſo verhalten ſich 288 Pfunde zur geſuchten Schwere der Kugel von 7 Zollen im Durchmeſſer.

1720 : 343 : : 288 : 57 Pfunde beynahe.

Auf ſolche Art kann man gar leicht die Schwere was immer für einer Kugel, von was immer für einem Metalle, Steine oder Holze durch die Rechnung beſtimmen, wenn man nur die Schwere einer Kugel von einer gewiſſen Größe, etwa von einem Schuhe im Durchmeſſer von eben ſelbem Metalle, Steine oder Holze kennt.

§. 125.

Ein würfelförmiges Geſchirr, das iſt, ein ſolches, welches von gleicher Länge, Höhe und Breite iſt, damit es genau 3 Cubicſchuhe Waſſer faſſe, wie lang, wie breit, wie hoch muß es ſeyn?

Man ziehe die Cubicwurzel aus 3, alſo daß man ſie wenigſt bis auf 2 Decimalzahlen genau findet.

3 | 000 | 000 $\sqrt{1,44}$
1 | |

---

2 | 000
| 3

12
48
64

1744
256 | 000
58 | 8

---

235 | 2
671
64

241984

14016 u. ſ. f.

Vierzehnter Abſchnitt.

Von der Decimal-Rechnung.

Von dem wahren Begriff eines Decimalbruches, und wie dieſelben ausgeſprochen werden müſſen.

§. 126.

Die Decimalbrüche ſind ſolche, welche die Einheit mit einer oder mehrern Nullen zu ihrem Nenner haben. Alſo ſind $\frac{5}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{7}{1000}$, $\frac{13}{10000}$, $\frac{754}{100000}$ u. ſ. f. Decimalbrüche. Aber dieſe Nenner werden gar ſelten ausgedrückt: man begnügt ſich, die Zähler zu ſchreiben, und ſelbe von den Ganzen durch ein Comma, oder durch einen Punkt abzuſündern; da dann allezeit die Einheiten mit ſo vielen Nullen, ſoviel der Zähler Ziffern hat, als der Nenner verſtanden wird. Alſo bedeutet 5,4 ſoviel als $5\frac{4}{10}$: und 4,65 ſoviel als $4\frac{65}{100}$: und 3,037 ſoviel als $4\frac{37}{1000}$. Wenn keine Ganze zugegen ſind, ſo wird vor dem Strichlein eine o geſchrieben, dieſen Abgang der Ganzen anzuzeigen. Alſo heißt 0,5 ſoviel als $\frac{5}{10}$, und 0,35 ſoviel als $\frac{35}{100}$.

§. 127.

Hieraus lernet man jeden Decimalbruch auszuſprechen. Man muß nämlich den Zähler

nach der gemeinen Art der ganzen Zahlen leſen, alsdenn die Einheit ſammt ſo vielen Nullen, ſo viele Ziffern im Zähler ſind, als den Nenner dazu ſetzen. Man wird dieſen Bruch 0,57 alſo leſen: ſieben und fünfzig hunderteſte Theile: den Bruch 0,037 alſo: ſieben und dreyßig tauſendeſte Theile, und ſo von andern.

Doch giebt es noch eine andere Art dergleichen Brüche auszuſprechen. Denn, weil $\frac{5}{10}$ und $\frac{7}{100}$, wenn ſie unter einem Nenner gebracht, und alsdenn addiret werden, $\frac{57}{100}$ Theile ausmachen; ſo folgt, daß man bey Decimalbrüchen entweder den ganzen Zähler auf einmal, und alsdenn den allgemeinen Nenner, oder aber jede Ziffer des Zählers beſonders ſammt ſeinem beſondern Nenner ausſprechen kann. Alſo kann man dieſen Bruch 0,357 entweder ausſprechen durch dreyhundert ſieben und fünfzig tauſendeſte Theile, oder auch durch drey zehnte, fünf hunderteſte und ſieben tauſendeſte. Eben alſo, wenn geſchrieben ſteht 0,0037, kann man leſen: ſieben und dreyßig zehntauſendeſte Theile, oder aber: kein zehnter, kein hunderteſter Theil, drey tauſendeſte, ſieben zehntauſendeſte Theile.

§. 128.

Damit man ſich einen rechten Begriff von dieſen Brüchen macht, betrachte man folgende

Ta-

Tabelle: man wird daraus den wahren Grund erkennen, auf welchem die ganze Berechnung der Decimalbrüche beruhet.

Ganze							Decimalen.						
6	5	4	3	2	1	8	1	2	3	4	5	6	
Der Millionen	Der Hunderttauſende	Der Zehntauſende	Der Tauſende	Der Hunderte	Der Zehner	Die Stelle der Einheiten	Der Zehnten Theile	Der Hunderteſten	Der Tauſendeſten	Der Zehntauſendeſten	Der Hunderttauſendeſten	u. ſ. f.

Dieſe Tabelle zeigt, daß der Werth der Decimalzahlen von der Rechten zur Linken immer um zehnmal größer werde, eben wie bey den ganzen Zahlen, und daß alſo dieſe Decimalzahlen einerley Natur mit den Ganzen haben.

§. 129.

Aus dieſem folgt erſtens: Jede Decimalzahl bekommt ihre Benennung und ihren Werth von dem Orte, an dem ſie ſteht.

 Alſo

Alſo iſt
$$0{,}5 = \frac{5}{10}$$
$$0{,}05 = \frac{5}{100}$$
$$0{,}005 = \frac{5}{1000}$$
$$0{,}0005 = \frac{5}{10000}$$

Zweytens: Die Nullen, welche den Decimalzahlen zur Rechten angehängt ſind, verändern derſelben Werth nicht. Alſo gilt 0,5 und 0,50 und 0,500 gleich viel, nämlich $\frac{5}{10}$.

Drittens: Aber die Nullen, welche zur Linken der Decimalziffern ſtehen, vermindern ihren Werth, indem ſie ſelbe von dem Strichlein weiter entfernen. Alſo 5,9 $= \frac{5}{10}$, 0,05 $= \frac{5}{100}$, und 0,0005 $= \frac{5}{10000}$. Wenn man dieſes alles wohl begriffen hat, ſo wird man in dem, was folgt, keine Schwierigkeit mehr finden.

Von der Addition und Subtraction der Decimalzahlen.

§. 130.

Im Anſchreiben der Zahlen, welche man addiren oder ſubtrahiren ſoll, habe man Acht, daß man die vom gleichen Werthe untereinander ſchreibe. Daher muß man das Strichlein, welches die Ganzen von den Decimalen ſcheidet, wohl vor Augen haben. Dieſe Strichlein müſſen im Anſchreiben alle genau unter einander ſtehen; wodurch es dann geſchieht, daß

daß die zehnte Theile unter die Zehnte, die Hunderteſte unter die Hunderteſte u. ſ. f. zu ſtehen kommen: und zur Linken des Strichlein die Einheiten unter die Einheiten, die Zehner unter die Zehner u. ſ. f. Alsdenn verrichte man die Addition oder Subtraction eben ſo, als wenn die gegebenen Zahlen lauter ganze vorſtellten. In der Summe oder in der Differenz ſetze man das Strichlein gerad unter das Strichlein der oben ſtehenden Zahlen.

Exempel der Addition.

Welches iſt die Summe dieſer Zahlen 34,5 + 65,3 + 12,8 + 95 + 87,81 + 7,9.

Man ſchreibe ſie alſo unter einander:

	34,5
	65,3
	12,8
	95
	87,81
	7,9
Summe	403,31

II.	III.	IV.
45,07	574,678953	0,975642
50,758	95,79643	0,745257
123,0057	78,0546	0,000598
74,702	54,789	2,8007
24,8	8,9	0,64053
318,3357	812,218983	5,162727

Exempel der Subtraction.

	I	II	III
von : : : : :	74,284	437,5	75,0034
ſubtrahire man :	45,375	89,657	57,875
Der Reſt iſt : :	28,909	347,843	17,1284

Anmerkung.

In dem zweyten Exempel muß man ſich die zween letzten Plätze rechter Hand mit Nullen beſetzt, vorſtellen. Ja, wenn man will, kann man die Nullen wirklich hinſchreiben, weil dadurch der Werth nicht geändert wird, wie ſchon oben iſt geſagt worden.

	IV	V	VI
von : :	562,	245,7578	0,547893
ſubtrah. man	93,5784	157,	0,49758
Der Reſt iſt	468,4216	088,7578	0,050313

	VII	VIII
von : :	0,237	1,
ſubtrahire man	0,228	0,997543
Der Reſt iſt :	0,009	0,002457

Die Probe der Addition und Subtraction wird gemacht, wie bey den Ganzen.

Zu Amſterdam iſt ehemals ein Brunnen gegraben worden, wo man die Schichten, wie folgt, übereinander gefunden hat.

Schwarze Gartenerde	0,7 einer Ruthe
Torf	0,9
Weicher Thon	0,9
Sand	0,8
Gartenerde	0,4
Thon	1
Erde	0,4
Sand	1
Thon	0,2
Weißer Sand	0,4
Trockene Erde	0,5
Moraſt	0,1
Sand	1,4
Sandichte Lette	0,3
Sand mit Thon vermenget	0,5
Sand mit Seemuſcheln vermengt	0,4
Thon	10,2
Kießlichter Sand	3,1
Summe	23,2

Wenn

Wenn man eine Portion von reinem Waſſer nimmt, welche 1 Pfund wiegt, ſo wiegt ein Stück

Erz von gleich großem körperlichen Inhalt	9
Silber	11,091
Gold	19,640
Stahl	7,803
Eiſen	7,645
Queckſilber	14,
Bley	11,310
Zinn	7,32[illegible]
Engliſch Zinn	7,295
Marmor	2,718
Grünlichtes Glas	3,620
Eichen Holz	0,550
Roth Braßlianiſch Holz	1,031
Buchsbäumenes Holz	1,031
Ebenholz	1,177
Buchenholz	0,738
Pantoffelholz	0,240
Gelbes Wachs	0,955
Weihrauch	1,071

Nun fragt man, wieviel wägen alle dieſe Stücke zuſammen, das Waſſer nicht mitgerechnet? Man findet: 108,235 Pfunde.

Ein

Ein Cubicſchuh Waſſer wiegt 72 Pfunde; ein Cubicſchuh Eiſen 550,440 Pfunde. Nun verliert jeder Körper, wenn er ins Waſſer verſenkt wird, ſoviel von ſeiner Schwere, als das Waſſer, ſo einen gleichen Raum mit ihm einnimmt, wiegt. Wenn alſo ein Cubicſchuh Eiſen ins Waſſer verſenket wird, wieviel wird er noch wägen?

	550.440
	72
Antwort:	478.440

Ein Cubicſchuh von Eichenholz wiegt 39,6 Pfunde. Ein Cubicſchuh Buchenholz aber 53,136. Um wieviel wiegt alſo dieſer mehr, als jener?

	53,136
	39,6
Antwort:	13,536

Von der Multiplication der Decimalzahlen.

§. 131.

Multiplicire man beyde Factoren durch einander eben ſo, als wenn es ganze Zahlen wären. In dem Produkte ſondere man ſo viele zur Rechten ſtehende Ziffeen durch das Strichlein von den Ganzen ab, als viele Decimalziffern in beyden Factoren zugleich ſinů.

Exem-

Zum Exempel.

	I	II
Der Muliplicandus	3,024	32,12
Der Multiplicator	22,3	23,3
Das Produkt	67,4352	780,516

	III	IV
Der Multiplicandus	87,546	5745
Der Multiplicator	4,36	0,0645
Das Produkt	342,46056	387,7875

Erſte Anmerkung. Es ereignet ſich nicht ſelten, daß man im Produkte nicht ſo viele Ziffern hat, als man gemäß der Regel durch das Strichlein abſchneiden ſollte. In dieſem Falle muß man ſo viele Nullen zur Linken hinzuſetzen, als nöthig ſind, damit man die gehörige Anzahl der Decimalziffern abſchneiden könne.

Zum Exempel.

	V	VI
Multiplitandus	0,5365	0,0347
Multiplicator	0,02435	0,0236
Das Produkt	0,013063775	0,00081892

Zweyte Anmerkung. Wenn man Decimalzahlen mit 10, 100, 1000 u. ſ. f. multipliciren ſoll, ſo rücke man nur das Strichlein um ſoll viele Stellen gegen die rechte Hand, als der Multiplicator Nullen hat. Alſo iſt

0,587

0,687×10=5,87; und 0,587×100=58,7; und 0,587×1000=587; und endlich 0,587 ×10000=5870.

Hier ſind noch einige Exempel zur Uebung.

57,056×0,578=32,978368
76,543×5,4246=415,2151578
0,56879×0,5674=0,322731446
0,03246×0,02364=0,0007673544
87649×0,03687=3231,61863
94,35786×6,57869=620,7511100034
3,141592×52,7438=165,6995001296

Noch andere Exempel zur Uebung.

Ein Pfund Eiſen verliert in dem Waſſer 0.1308 eines Pfundes: ein Pfund Erz 0.1138 eines Pfundes: ein Pfund italiäniſchen Marmors 0,3679. Nun dieſes vorausgeſetzt, laſſen ſich folgende drey Aufgaben leicht auflöſen.

Erſte Aufgabe. Ein 352 Pfund ſchwerer eiſener Körper iſt in dem Waſſer verſunken. Wieviel wird er im Waſſer noch wägen? Wie große Kräfte werden erfordert, ſelben empor zu ziehen?

0,1308×352=46,0416 ſoviel verliert er im Waſſer.

Dieſes abgezogen von 352

giebt zum Reſte : 305,9584 ſoviel wird er alſo im Waſſer wägen.

Zweyte

Zweyte Aufgabe. Wieviel braucht man Kräfte, eine marmorſteinerne Statue von 573 Pfunden aus dem Waſſer empor zu ziehen?

0,3679 × 573 = 210,8067 ſoviel verliert ſie im Waſſer.
Dieſes abgezogen von 573
giebt zum Reſte : : 362,1933 ſoviel wiegt ſie noch im Waſſer.

Dritte Aufgabe. Ein erzerner Lauf eines Stücks von 1365 Pfunden iſt in das Waſſer verſenkt worden. Wie viele Kräfte ſind nothwendig, ſelbes daraus zu erheben?

0,1138 × 1375 = 156,4750
Dieſes abgezogen von 1375
giebt zum Reſte : : : 1218,5250

Man hat alſo gefunden, wieviel dieſe verſunkenen Körper noch im Waſſer wägen. Wenn ſie alſo mit um etwas größern Kräften angezogen werden, ſo werden ſie in die Höhe getrieben werden.

Vierte Aufgabe. Wenn die Schwere eines Cubicſchuhes Waſſer bekannt iſt, kann man durch die Multiplication auch die Schwere eben eines ſolchen Cubicſchuhes von allen jenen Körpern finden, welche in der zweyten Aufgabe des vorhergehenden Abſchnittes angeſetzt ſind. Wir wollen ſetzen, die

Pariſer

Pariſer Cubicſchuh Waſſer wäge 72 Pfunde: ſo darf man nur dieſe Zahl 72 multipliciren durch jene Zahl, welche in beſagter Aufgabe neben jeder Gattung der Körper ſteht. Alſo findet man, es wäge

ein Cubicſchuh Erz $72 \times 9 = 648$
Silber $72 \times 11{,}091 = 798{,}552$
Gold $72 \times 19{,}640 = 1414{,}080$

und ſo von den übrigen.

Fünfte Aufgabe. Es iſt eine ſteinerne Statue in mehrere Trümmer zerſchlagen Ein Künſtler ſoll eine vollkommen gleiche von Erze verfertigen. Nun verlangt man zu wiſſen, wie viele Pfunde Erz er hiezu nöthig habe. Dieſes zu berechnen, kann man alſo verfahren: Man laſſe eine viereckichte reguläre Kiſte verfertigen, welche das Waſſer halte. Meſſe die Länge und die Breite dieſer Kiſte ſehr genau. Eeſetze, die Länge ſey 4 Schuh, 3 Zohe, und 7,6 Linien, oder nachdem man alles in Linien verändert, 619,6 Linien: die Breite 2 Schuhe, 3 Zolle, und 5,4 Linien, oder nach der Reduction 329,4 Linien. Multiplicire man beyde durch einander.

$$\begin{array}{r} 619{,}6 \\ 329{,}4 \\ \hline 204096{,}24 \end{array}$$ Produkt.

Dieſes Produkt iſt die Grundfläche der Kiſte in Quadratlinien ausgedrückt. Nun

 gieße

gieße man ſoviel Waſſer in die Kiſte, als man nöthig erachtet, daß alle Trümmer der zerbrochenen ſteinernen Statue darinnen können verſenket werden. Zeichne man an den Seiten der Kiſte auf das genaueſte, wie hoch das Waſſer ſteht. Alsdenn werfe man die Trümmer der Statue alle in das Waſſer. Unterſuche man, ſo genau es möglich iſt, um wieviel nun das Waſſer geſtiegen iſt. Geſetzt, man fände, daß es um 11 Zolle und 7,3 Linien höher ſtehe, das iſt, nach der Reduction, um 139,3 Linien. Multiplicire man die zuvor gefundene Grundfläche der Kiſte mit dieſen 139,3 Linien.

$$\begin{array}{r} 204096{,}24 \\ 139{,}3 \\ \hline 28430606{,}232 \end{array}$$ ſo iſt

das Produkt der körperliche Inhalt der ganzen Statue in Cubiclinien ausgedrückt.

Unterſuche man mit aller möglichen Genauigkeit, wieviel ein Cubicſchuh eines reinen Waſſers wiege (man muß aber einen ſolchen Schuh nehmen, in welchen man die Kiſte abgemeſſen hat); wir wollen ſetzen, man finde 72 Pfunde. Multiplicire man dieſe mit 9; weil das Erz neunmal ſchwerer iſt, als das Waſſer: das Produkt 648 Pfunde iſt die Schwere eines Cubicſchuh Erzes. Aus dieſem folgt, eine Cubiclinie von Erz wäge 0,000217017 von einem Pfunde (wie man durch die Diviſion

viſion erfahren könnte, welche wir in dem nächſten §. erklären wollen). Multiplicire man dieſes mit dem oben gefundenen körperlichen Inhalte der Statue.

$$\begin{array}{r} 28430606{,}232 \\ 0{,}000217017 \\ \hline 6169{,}924872649944 \end{array}$$ Produkt.

Dieſes Produkt iſt die Schwere der zu verfertigenden Statue. Wenn man alſo die Decimalzahlen wegläßt, ſo erkennt man, daß man 6170 Pfunde Erz brauche.

Von der Diviſion der Decimalzahlen.

§. 132.

Man erinnere ſich jenes Grundſatzes: Das Produkt, welches aus der Multiplication des Quotienten durch den Diviſor entſteht, iſt jederzeit dem Dividendus gleich. Aus dieſem Grundſatze, wenn man, was von der Multiplication der Decimalzahlen iſt geſagt worden, dazu nimmt, fließt dieſe allgemeine Regel der Diviſion. In dem Diviſor und Quotienten zugleich müſſen ſo viele Decimalziffern ſeyn, als viele derſelben der Dividendus hat. Uebrigens verrichte man die Diviſion mit Decimalzahlen eben ſo, als wenn ſie alle lauter ganze Zahlen vorſtellten.

Aus dieſer allgemeinen Regel fließen wieder vier beſondere, die in vier verſchiedenen Fällen, welche in der Diviſion der Decimalzahlen vorkommen können, dienen müſſen.

§. 133.

Erſter Fall. Wenn der Diviſor eben ſo viele Decimalziffern hat als der Dividendus, ſo zeigen alle Ziffern des Quotienten Ganze an; wie in dieſen Exempeln:

```
8,45) 295,75 (35   | 0,0078) 0,4368 (56
      2535         |         390
      ----         |         ---
       4225        |          468
       4225        |          468
       ----        |          ---
         0         |           0
```

§. 134.

Zweyter Fall. Wenn der Dividendus mehr Decimalziffern hat als der Diviſor, ſo ſchneide man in dem Quotienten ſo viele zur Rechten ſtehende Ziffern durch das Strichlein ab, um ſo viel der Dividendus mehr Decimalziffern hat als der Diviſor. Alſo, wenn der Dividendus vier, der Diviſor aber 3 Decimalziffern hat, ſo muß man im Quotienten eine abſchneiden: hat der Diviſor drey, der Dividendus aber ſieben, ſo muß der Quotiens vier bekommen.

Zum

Zum Exempel.

```
24,3)780,516(32,12 | 436)34246,056(78,546
     729           |      3052
     ---           |      ----
     515           |       3726
     486           |       3488
     ---           |       ----
      291          |        2380
      243          |        2180
      ---          |        ----
       486         |         2005
       486         |         1744
       ---         |         ----
         0         |          2616
                   |          2616
                   |          ----
                   |             0
```

```
0,534) 0,30438 (0,57
        2670
        ----
        3738
        3738
        ----
           0
```

Anmerkung.

Wenn nach vollbrachter Diviſion ein Reſt bleibt, ſo kann man dieſen Reſt außer Acht laſſen, wenn man ſieht, daß der Quotient ſchon etliche Decimalzahlen hat, und alſo ſchon genau genug gefunden iſt: oder wenn der Quotient noch keine oder ſehr wenige Decimalen hat, und hiemit noch nicht gar genau gefunden iſt; ſo kann man zu dieſem Reſte

 eine

eine o ſetzen, und die Diviſion weiter fortſetzen: bleibt nach dieſer Diviſion noch ein Reſt, ſo kann man wieder eine o hinzuſetzen, und in der Diviſion fortfahren, u. ſ. f. ſo lang es beliebt, und bis man erkennet, daß nunmehr der Quotient genug Decimalen hat, und hiemit der Fehler, der aus Verachtung des letzten Reſtes entſteht, nicht mehr beträchtlich iſt. Jedoch muß man hiebey dieſes merken, daß man alle hinzugeſetzte o als Decimalziffern des Dividendus betrachte, und im Quotienten ſo viele letzte Ziffern durch das Strichlein abſondere, als viele alle Decimalziffern des Dividendus erfordern.

Zum Exempel.

```
2,35) 1356 (5,7702
      1175
      ----
       1810
       1645
       ----
        1650
        1645
        ----
          500
          470
          ---
           30
```

In dieſem Exempel waren Anfangs im Dividendus zwo Decimalzahlen; man hat aber in der Fortſetzung der Diviſion vier o hinzugethan; wenn man alſo dieſe als Decimalzahlen betrach-

betrachtet, ſo ſind nunmehr ſechs Decimalziffern im Dividendus. Im Diviſor ſind zwey Decimalziffern: es müſſen alſo im Quotienten vier ſeyn: und folglich muß das Strichlein nach 5 geſetzt werden. Der letzte Reſt wird vernachläßiget, weil man im Quotienten ſchon vier Decimalziffern hat; und alſo nicht mehr um einen zehntauſendeſten Theil eines Ganzen fehlen kann: welcher Fehler nicht mehr zu achten iſt. Dieſes wird noch beſſer weiter unten erklärt werden.

§. 135.

Dritter Fall. Wenn der Dividendus weniger Decimalziffern hat, ſo ſetze man am Ende des Dividendus alſobald, bevor man die Diviſion anfängt, ſo viele o hinzu, als erklecklich ſind, daß die Anzahl der Decimalziffern des Dividendus jener des Diviſors gleich werde. Wenn alsdenn die Diviſion zum Ende gebracht iſt, ſo zeigen die Ziffern des Quotienten lauter Ganze an.

Zum Exempel.

3,521) 19743655,4

Setze man, bevor man die Diviſion anfängt, zwo Nullen zum Dividendus; weil im Diviſor drey Decimalziffern ſind, der Dividendus aber nur eines hat. Das Exempel wird alsdenn alſo ſtehen, und die Diviſion alſo fortlaufen, wie man hier ſieht.

```
2.521) 197436455,400 (7831676 204/2521
       17647
       -----
        20966
        20168
        -----
         7985
         7563
         ----
         4225
         2521
         -----
         17044
         15126
         -----
          19180
          17647
          -----
           15330
           15126
           -----
             204
```

Zum Exempel.

1,32) 3036

Setzt man, bevor man die Diviſion anfängt, zwo Nullen zum Dividendus, weil im Diviſor zwo Decimalzahlen ſind, der Dividendus aber keine hat. Das Exempel wird alsdenn alſo ſtehen, und die Diviſion alſo laufen, wie man hier ſieht.

```
132) 3036,00 (2300 lauter Ganze.
     264
     ---
      396
      396
      ---
        0
```

Drit-

Drittes Exempel.

0,3021) 50142

Setze man, bevor man die Diviſion vornimmt, vier Nullen zum Dividendus; denn wird der Dividendus ſoviel Decimalziffern bekommen, als der Diviſor hat. Die Diviſion ſelbſt wird alſo lauten.

```
0,3021) 50142,0000 (165978 462/3021
        3021
        ----
        19932
        18126
        -----
         18060
         15105
         -----
          29550
          27189
          -----
           23610
           21147
           -----
            24630
            24168
            -----
              462
```

Anmerkung.

In dem erſten und dritten Exempel kann man den zuletzt gebliebenen Reſt in Geſtalt eines Bruches anſchreiben, nach und nach einige Nullen dazuſetzen, und alſo in der Diviſion fortfahren; da dann die neu entſtandenen Ziffern ſo viele Decimalziffern des Quotienten ſeyn würden.

§. 136.

§. 136.

Vierter Fall. Wenn nach verrichteter Diviſion nicht ſo viele Ziffern im Quotienten ſind, als man gemäß der Regel abſchneiden ſollte, ſo ſetze man zur Linken ſo viele Nullen hinzu, als man nöthig hat.

Zum Exempel.

$$
\begin{array}{r}
956)\ 7{,}24648\ (0{,}00758 \\
6\,692\phantom{48\ (0{,}00758} \\
\hline
{}^{\cdot}\,5544\phantom{8\ (0{,}00758} \\
4780\phantom{8\ (0{,}00758} \\
\hline
{}^{\cdot}\,7648\phantom{\ (0{,}00758} \\
7648\phantom{\ (0{,}00758} \\
\hline
0\phantom{\ (0{,}00758}
\end{array}
$$

Weil in dieſem Exempel der Dividendus fünf Decimalziffern hat, der Diviſor aber gar keine, ſo muß der Quotient gleichfalls fünf bekommen. Nun aber bekömmt in der wirklichen Diviſion der Quotient nur drey Ziffern, nämlich 758; man ſetze alſo noch zwo Nullen vor dieſelbe, und alsdenn das Strichlein, und vor dieſes noch eine Nulle, zum Zeichen, daß die Ganzen abgehen.

Zum Exempel.

0,575) 0,0007475 (0,0013
575
―――
1725
1725
―――
0

Weil in dieſem Exempel der Dividendus ſieben, der Diviſor drey Decimalziffern hat, ſo muß der Quotient vier bekommen. Wenn man nun die Zahl 7475 durch 575 dividirt, ſo entſteht der Quotient 13. Man ſetze alſo noch zwo Nullen davor, und alsdenn das Strichlein; ſo hat man den wahren Quotienten.

§. 137.

Anmerkung.

Wenn man Decimalzahlen durch 10, 100, 1000 u. ſ. f. dividiren ſoll, ſo rücke man das Strichlein um ſo viele Stellen zur Linken, als viele Nullen der Diviſor hat. Alſo iſt

10)	5784	(578,4
100)	5784	(57,84
1000)	5784	(5,784
10000)	5784	(0,5784

Hier ſind noch einige Exempel zur Uebung, in welchen alle vier Fälle vorkommen.

57,4	4930,66	85,9
574	493,066	0,859
574	49,3066	0,0859
5,74	4930,66	859
5,74	49,3066	8,59
0,0574	0,493066	8,59
5,74	493066	85900
0,0574	493,066	8590

Man laſſe nun die Anwendung in einigen praktiſchen Aufgaben, in denen die Multiplication ſowohl als Diviſion mit Decimalzahlen vorkömmt, machen.

Erſte Aufgabe. Ein Cubicſchuh Silber wiegt 798,552 Pfunde. Wieviel wiegt ein Cubiczoll? und wieviel eine Cubiclinie?

Weil ein Cubicſchuh 1728 Cubiczolle in ſich hat, ſo dividire man 798,552 durch 1728. Der Quotient iſt 0,462125: und dieſes iſt die Schwere eines Cubiczolles. Weil nun ein Cubiczoll abermal 1728 Cubiclinien in ſich begreift, ſo dividire man 0,462125 durch 1728. Der Quotient 0,000268 giebt die Schwere einer Cubiclinie.

Anmerkung.

Um aus dem gegebenen Durchmeſſer eines Cirkels die Peripherie deſſelben zu finden; muß man den Durchmeſſer mit 3,14159 multipliciren. Wenn die Peripherie gefunden iſt,

ſo

ſo bekommt man die Fläche deſſelben Cirkels, wenn man den vierten Theil des Durchmeſſers mit der Peripherie multiplicirt. Iſt die Cirkelfläche bekannt, welche entſteht, wenn eine Kugel mitten entzwey geſchnitten wird, ſo findet man die ganze Oberfläche der Kugel, wenn die Fläche deſſelben Cirkels mit 4 multiplicirt wird: und wenn man die Oberfläche der Kugel mit dem ſechsten Theile des Durchmeſſers multiplicirt, ſo erhält man den körperlichen Inhalt dieſer Kugel. Alles dieſes iſt in der Geometrie erwieſen. Nun dieſes vorausgeſetzt; ſey

Die zweyte Aufgabe. Es iſt eine eiſerne Kugel: ſie hat 1 Schuh, 2 Zolle, 3,6 Linien im Durchmeſſer. Man verlangt zu wiſſen die Größe der Cirkelfläche, welche entſtehen würde, wenn die Kugel mitten entzwey getheilet würde: zweytens die Oberfläche der ganzen Kugel: drittens ihren körperlichen Inhalt: viertens ihr Gewicht oder ihre Schwere.

Wenn man den Durchmeſſer in lauter Linien ausdrückt, ſo bekommt man 171,6 Linien.

Hieraus entſteht

171,6 × 3,1459 = 539,096844 die Peripherie.
171,6 : 4 = 42,9 ; ; ; der vierte Theil des Durchmeſſers.

539,096844 × 42,9 = 23127,2546076 die Fläche des Cirkels in Quadratlinien.

23127,

23127,2546076 × 4 = 92509,0184304 die Oberfläche der ganzen Kugel in Quadratlinien.

171,6 : 6 = 28,6 : : der ſechste Theil des Durchmeſſers.

92509,0184304 × 28,6 = 2645757,92710944 der körperliche Inhalt der ganzen Kugel in Cubiclinien.

Ein Cubicſchuh hält in ſich 12 × 12 × 12 oder 1728 Cubiczolle: ein Cubiczoll 1728 Cubiclinien. Alſo hält ein Cubicſchuh in ſich 1728 × 1728 oder 2985984 Cubiclinien. Dividirt man alſo den in Cubiclinien gefundenen körperlichen Inhalt durch dieſe Zahl: ſo bekommt man

2645757,92710944 : 2985984 = 0,88605897

Ein Cubicſchuh von Eiſen wiegt 550,440 Pfunde. Hieraus entſteht

0,88605897 × 550,440 = 487,7222994680 die Schwere der gegebenen Kugel.

§. 138.

Anmerkung.

Die magdeburgiſchen Halbkugeln, wenn die Luft rein iſt ausgepumpet worden, werden von der darauf liegenden Luft ſo ſtark an einander gedrückt, ſoviel eine Säule von Queckſilber, welche die Fläche der Halbkugel zu ihrer Grundfläche, und 26 Zolle oder 312 Linien in

in der Höhe hätte, wägen würde. Nun aber findet man den körperlichen Inhalt einer ſolchen Säule, wenn man die Grundfläche durch die Höhe multiplicirt.

Dritte Aufgabe. Zwo magdeburgiſche Halbkugeln haben im Durchmeſſer 8 Zolle 4,6 Linien, oder 100,6 Linien. Wenn alle Luft aus ihnen herausgezogen würde, wie ſtark würden ſie an einander halten?

100,6×3,14159=316,043954 die Peripherie.
100,6 : 4=25,15 : : : der vierte Theil des Durchmeſſers.

316,043954×25,15=7948,5054431 die Cirkelfläche der Halbkugel.

7948,5054431×312=2479933,6982472 der körperliche Inhalt der merkurialiſchen Säule der Cubiclinien.

2479933,6982472 : 2985984=0,8305248 eben dieſer körperliche Inhalt in Cubicſchuhen.

72×14=1008 : : Schwere eines Cubicſchuhes Queckſilbers.

0,8305248×1008=837,1689984 Schwere der merkurialiſchen Säule in Pfunden ausgedrückt, und zugleich die Kraft, mit welcher die Halbkugeln zuſammen hangen.

Anmer-

Anmerkung.

Ein Körper, deſſen Grundfläche ein Cirkel iſt, und welcher über das von unten hinaufwärts immer, bis er endlich in eine Spitze zuſammen läuft, alſo abnimmt, daß, wo man denſelben immer parallel mit der Grundfläche durchſchnitte, der Durchſchnitt eine Cirkelfläche wäre, wird ein Kegel genannt. Nun iſt ein ſolcher Kegel der dritte Theil eines Cylinders, welcher eben dieſelbe Grundfläche und Höhe hat.

Vierte Aufgabe. Die Grundfläche eines gewißen Kegels hat im Durchmeſſer 9 Zolle, und 4,4 Linien, oder 112,4 Linien. Die Höhe iſt 11 Zolle und 3,7 Linien, oder 135,7 Linien. Wie groß iſt ſein körperlicher Inhalt?

112,4 × 3,14159 = 353,114716 die Periph.

112,4 : 4 = 28,1 : : : der vierte Theil des Durchmeſſers.

353,114716 × 28,1 = 9922,5235196 die Grundfläche in Quadratlinien.

9922,5235196 × 135,7 = 1346486,44160972 der körperliche Inhalt des Cylinders in Cubiclinien.

1346,486,44160972 : 3 = 448828,813869906 der körperliche Inhalt des Kegels in Cubiclinien.

448828,813869906 : 72 = 259,738896915 eben dieſer körperlicher Inhalt in Cubiczollen.

Von

Von Veränderung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche, und im Gegentheile der Decimalbrüche in gemeine.

§. 139.

Ein jeder gemeiner Bruch kann in einen Decimalbruch auf folgende Art verändert werden. Man ſetze am Ende zu dem Zähler eine 0 hinzu: dividire ihn alsdenn durch ſeinen Nenner: der Quotient wird die erſte Decimalziffer ſeyn. Man multiplicire den Diviſor durch den Quotienten: das Produkt ziehe man vom Dividendus ab: bleibt kein Reſt, ſo iſt der gefundene Decimalbruch dem gegebenen gleich; bleibt aber ein Reſt, ſo ſetze man zu dieſem Reſte abermal eine 0: wiederhole die Diviſion mit ſeinem Nenner; und dieſes ſo lange, bis man nach einer Abziehung keinen Reſt mehr bekommt. Geſchieht dieſes, ſo ſind die bis dahin erhaltenen Decimalziffern dem gegebenen Bruche vollkommen gleich. Alſo iſt $\frac{2}{5} = 0,4$: und $\frac{3}{4} = 0,75$.

Es ereignet ſich aber nicht ſelten, daß immer ein Reſt bleibe, ſoviel man immer Nullen hinzuſetzt, und ſo oft man immer die Diviſion wiederholt. In dieſem Falle nun kann kein Decimalbruch gefunden werden, welcher dem gegebenen vollkommen gleich iſt. Unterdeſſen kann man doch einen Decimalbruch finden, der dem gegebenen ſo nahe kömmt, als man

immer will, und für nöthig erachtet; denn, wenn man die Diviſion dreymal wiederholt, und alſo drey Decimalziffern ſucht, ſo fehlt man nicht mehr als um einen tauſendeſten Theil eines Ganzen. Wiederholt man die Diviſion viermal, ſo fehlt man nicht mehr um einen zehntauſendeſten Theil eines Ganzen u. ſ. f. Alſo kann der Bruch $\frac{4}{7}$ in einen ihm vollkommen gleichen Decimalbruch niemal verändert werden. Jedoch, wenn man viermal eine 0 hinzuſetzt, und alſo die Diviſion viermal wiederholt, ſo wird es alſo hergehen.

$$
\begin{array}{l}
7)\ 40\ (0{,}5714 \\
\underline{35} \\
\ \ 50 \\
\ \ \underline{49} \\
\ \ \ 10 \\
\ \ \ \underline{\ 7} \\
\ \ \ \ 30 \\
\ \ \ \ \underline{28} \\
\ \ \ \ \ 2
\end{array}
$$

Und dieſer Decimalbruch 0,5714 kommt dem gegebenen ſo nahe, daß er um keinen zehntauſendeſten Theil zu klein iſt. Sollte man die Diviſion noch öfters wiederholen, ſo würde man dem gegebenen Bruche immer noch näher kommen.

§. 140.

Es ſieht alſo ein jeder ſelbſt, daß man in Veränderung der gemeinen Brüche in Decimal-

cimalbrüche, nachdem man einige Decimalziffern gefunden hat, die Diviſion unterbrechen kann, obwohl noch ein Reſt geblieben iſt. Denn, was liegt daran, ob man etwa um einen zehntauſendeſten Theil eines Guldens fehle oder nicht? Jedoch kann man hierinn keine allgemeine Regel geben, wieviel man Dicimalziffern ſuchen müſſe, ehe man abbrechen darf; denn dieſes hängt von dem Gegenſtande der Berechnung ab. Rechnet man von Kreuzern, ſo könnte man aufhören, ſobald man die erſte Decimalzahl gefunden hat: weil es ja genug iſt, wenn man um keinen zehnten Theil eines Kreuzers fehlt. Rechnet man von Gulden, ſo könnte man abbrechen, nachdem man drey Decimalziffern gefunden hat; weil der Fehler von einem oder andern zehntauſendeſten Theil eines Gulden nicht mehr zu achten iſt.

Dieſes iſt zu verſtehen für jenen Fall, da die Rechnung ſchon am Ende iſt; denn, wenn man den alſo beynahe gefundenen Bruch noch mit einer ganzen Zahl multipliciren müßte, ſo könnte der Anfangs keine Fehler nach der Multiplication beträchtlich ſeyn; weil alſo, gleichwie der Bruch, ſo auch der Fehler deſſelben multiplicirt würde. Geſetzt, man hätte gefunden, ein Pfund einer gewiſſen Waare koſte 3 Gulden und $\frac{4}{7}$ eines Gulden; ferner man hätte dieſen Bruch in einen Decimalbruch verändert, und für den Werth eines Pfundes angeſetzt 3,571. Der Fehler würde ſich auf 4 zehntauſendeſten Theile eines Gulden belaufen, welcher Fehler in der

That nicht zu achten wäre. Ferner: man hätte 1000 Pfunde dieſer Waare, und verlangte den ganzen Werth derſelben zu wiſſen. Man müßte zu dieſem Ende den Werth 3,571 eines Pfundes mit 10000 multipliciren: das Produkt würde ſeyn 35710 Gulden. Allein dieſes Produkt wäre um mehr als 4 Gulden zu klein; weil der im erſten Decimalbruch ſteckende Fehler mit 10000 multiplicirt über 4 Gulden ſteigt. In dieſem Falle dann merke man dieſe Regel. Man ſuche ſo viele Decimalziffern, bis man erkennt, daß der Fehler vor der Multiplication nicht mehr beträchtlich ſey: und alsdenn ſuche man noch ſoviel, ja noch um eine mehr, als Ziffern im Multiplicator ſind, welche Ganze vorſtellen. Alſo muß man im vorigen Exempel, erſtens drey Decimalziffern ſuchen, weil einige tauſendeſte Theile eines Gulden noch beträchtlich ſind: man muß über das noch fünf andere ſuchen, weil der alſo gefundene Bruch mit 10000 muß multiplicirt werden. Man wird alſo für den Werth eines Pfundes finden 3,57142857. Wenn man dieſen mit 10000 multiplicirt, ſo bekommt man 35714,2857 als den Werth der ganzen Waare.

§. 141.

Die meiſten aus jenen Dingen, die in der Rechnung vorkommen, pflegen nicht in 10, 100, 1000 u. ſ. f. Theile abgetheilt zu werden. Wenn man alſo neben den Ganzen einen Decimalbruch bekommt, ſo weiß man nicht, was dieſer Bruch austrage, wenn er nicht in einen andern verändert

dert wird, der eine ſolche Zahl zum Nenner hat, in welche das Ganze, von dem damals die Rede iſt, pflegt abgetheilt zu werden. Nun dieſe Veränderung muß auf eben die Art geſchehen, wie oben geſagt worden. Man muß nämlich die Decimalziffern mit dem Nenner multipliciren, den man dem neuen Bruche geben wolle, und das Produkt mit dem Nenner eines Decimalbruches dividiren, oder, weil ein Decimalbruch allezeit die Einheit mit einigen Nullen zum Nenner hat, ſo viele Ziffern vom Produkte rechter Hand abſchneiden, als Nullen in dem Nenner ſind. Die überbleibenden Ziffern ſind der Zähler des neuen Bruchs. Z. E. Man ſoll 0,5 einer Stunde in einen andern Bruch verändern, deſſen Nenner 60 iſt. Man multiplicire 5 durch 60: das Produkt iſt 300. Dieſes dividire man durch 10, oder was eines iſt, man ſchneide die letzte Ziffer ab: ſo bleibt 30 der Zähler des verlangten Bruchs, welcher alſo iſt $\frac{30}{60}$, das iſt, 30 Minuten oder eine $\frac{1}{2}$ Stunde.

Hier ſind noch einige Exempel. Wie viele Kreuzer gilt der Bruch 0,9 eines Gulden? Man multiplicire 9 durch 60. Vom Produkt 540 ſchneide man die letzte Ziffer ab, ſo bleiben $\frac{54}{60}$, das iſt, 54 Kreuzer.

Wie viele Stunden, Minuten und Secunden gilt der Bruch 0,6 56944 eines Tags? Weil ein Tag in 24 Stunden pflegt eingetheilt zu werden, ſo muß man dieſen Bruch in einen andern verändern, deſſen Nenner 24 iſt. Man multiplicire alſo 6256944 durch 24, das Pro-

 dukt

dukt iſt 150166656. Von dieſem ſchneide man 7 Ziffern ab, weil der Nenner des gegebenen Bruchs neben dem 1 ſieben Nullen hat, ſo bleiben 15 Stunden. Dieſe abgeſchnittenen Ziffern 0166656 ſind ein Decimalbruch einer Stunde. Um nun dieſen in Minuten zu verändern, multiplicire man ihn mit 60. Das Produkt iſt 9999360. Man ſchneide ſieben Ziffern ab, ſo bleibt nichts übrig. Man bekommt alſo keine Minute. Die abgeſchnittenen ſieben Ziffern 9999360 ſind ein Decimalbruch einer Minute. Um dieſen in Secunden zu verändern, multiplicire man ihn mit 60, das Produkt iſt 599961600. Man ſchneide ſieben Ziffern ab, es bleiben 59 Secunden. Die abgeſchnittenen ſieben Ziffern ſind ein Decimalbruch einer Secunde, welchen man in Terzen verändern kann, wenn man es für nöthig erachtet. Man würde finden 59 Terzen, weil alſo 59 Terzen ſehr nahe eine Secunde gelten, ſo könnte man ſie ohne beträchtlichen Fehler für eine Secunde annehmen. Man hat alſo 60 Secunden; und weil 60 Secunden eine Minute ausmachen, ſo erkennt man, daß 0,6256944 eines Tags 13 Stunden und eine Minute gelten.

Ende des erſten Theils.

Des

Des zweyten Theiles

Erſter Abſchnitt.

Von den Größen.

§. 1.

Unter einer Größe verſteht man alles dasjenige, was ſich vermehren, oder vermindern läßt, oder zu der etwas hinzugethan, oder davon weggenommen werden kann.

§. 2.

Alle Größen, welche das Zeichen + (ſo plus oder mehr ausgeſprochen wird) vor ſich haben, nennt man bejahende oder poſitive Größen: hingegen alle Größen, welche das Zeichen — (ſo minus oder weniger ausgeſprochen wird) vor ſich haben, nennt man verneinende oder negative Größen.

§. 3.

Durch die bejahende oder poſitiven Größen ſtellt man ſich den wirklichen Beſitzſtand einer Sache vor; ſo wie im Gegentheile die verneinenden oder negativen Größen den Mangel deſſelben andeuten.

§. 4.

Einfache oder einzelne Größen ſind diejenigen, die nur durch einen Buchſtaben angezeigt werden; zuſammengeſetzte Größen aber ſolche, ſo aus zwey oder auch aus mehreren Größen durch die Zeichen + oder — verbunden oder abgeſondert werden.

§. 5.

Diejenige Wiſſenſchaft, welche aus einigen gegebenen Größen andere ihres gleichen, von denen in Anſehung der gegebenen etwas bekannt gemacht wird, durch gewiße Gleichungen zu finden, lehrt, wird die gemeine Algebra genannt.

§. 6.

Die Buchſtaben-Rechenkunſt zeigt, wie man ſtatt der Ziffern allgemeine Zeichen der Größen ſich bedienen, und damit die gewöhnlichen Rechnungsarten verrichten könne.

§. 7.

Alle bekannte Größen werden mit den Anfangsbuchſtaben des Alphabeths; die unbekannten Größen aber mit den letzten Buchſtaben des Alphabeths benennet.

§. 8.

Diejenige Zahlen, welche den Buchſtaben vorgeſetzt werden, heißt man Coeficienten. Z. E. 4a ſey die Größe, ſo iſt 4 der Coeficient.

§. 9.

Diejenige Zahlen, welche den Größen oben angeſetzt werden, nennt man die Exponenten der Größen. Z. E. Bey a^4 iſt die Zahl 4 oberhalb der Größen der Exponent von a.

Zweyter Abſchnitt.

Von den vier Rechnungsarten mit ganzen Größen.

§. 10.

Was von der Addition bey den Zahlen gelehrt worden iſt, das nämliche gilt auch bey der Algebra, und ſind hiebey die drey Fälle wohl zu merken. Als:

1) ſind die Größen von einerley Art, und haben dieſelbe einerley Zeichen:

2) ſind die Größen von einerley Art; haben aber verſchiedene Zeichen: und

3) ſind die Größen nicht von einerley Art: und haben zum Theil einerley oder aber auch verſchiedene Zeichen.

§. 11.

Bey dem erſten Fall, wenn die Größen von einerley Art ſind, und auch einerley Zeichen haben, wird die Addition wie in der gemeinen Rechenkunſt verrichtet. Z. E.

	a	$-a$	$5b$	$-7bc$
	a	$-a$	$3b$	$-8bc$
Summe	$2a$	$-2a$	$8b$	$-15bc$

	$3a+5b$	$3a-5b$	$6ab+12$
	$2a+7b$	$2a-7b$	$3ab+24$
Summe	$5a+12b$	$5a-12b$	$9ab+36$

$$
\begin{array}{l r}
 & a + 2b - c + 5d \\
 & 6a + 3b - 5c + 2d \\
\hline
\text{Summe} & 7a + 5b - 6c + 7d
\end{array}
$$

§. 12.

Im zweyten Fall; wenn die Größen, wie im erſten Fall, von einerley Art ſind, aber verſchiedene Zeichen haben, ſo ziehe man von der größern Größe die kleinere Größe ab, und zu dem Reſt ſetze man das Zeichen der größern Größe. Z. E.

	$5a$	$-5a$	$7bc$	$-9abd$
	$-3a$	$+2a$	$-6bc$	$+7abd$
Summe	$+2a$	$-2a$	$+bc$	$-2abd$

	$+7a-5b$	$-8ab-7bc+15$
	$-5a+7b$	$+12ab+7b-24$
Summe	$2a+2b$	$4ab- : : -9$

	$2ac - 3bd + 2cg - 4def$
	$3ac + 5bd - 8cg - 2def$
Summe	$5ac + 2bd - 6cg - 6def$

§. 13.

Schon aus der Natur der Größen läßt es ſich leicht einſehen, daß alle Größen, ſo — oder minus haben, fehlen, im Gegentheile alle Größen, die + oder plus haben, wirklich vorhanden ſind. Soll man alſo von beyder Art addiren, ſo wird durch die letztere der Mangel aufgehoben, und muß folglich die Addition in eine Subtraction verwandelt werden.

§. 14.

Soll man nach dem dritten Fall Größen von verſchiedener Art und von verſchiedenen Zeichen zuſammen addiren, ſo ſchreibe man die Größen mit Beybehaltung ihrer gegebenen Zeichen neben einander hin. Z. E.

	a	a	$4b+7cd$
	b	$-b$	$4a-10$
Summe	$a+b$	$a-b$	$4b+7cd+4a-10$

$$\begin{array}{ll} & a+4b+c-3d \\ & -4e-8f+h+g \\ \hline \text{Summe} & a+4b+c-3d-4e-8f+h+g \end{array}$$

In folgenden Exempeln ſind alle drey Fälle angebracht.

$$\begin{array}{l|l} \left\{\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2 \\ \quad -4ab \end{array}\right. & \begin{array}{l} 8ab+bc-37 \\ -7ab-bc+42-6d \end{array} \\ \hline \text{Summe}\ a^2-2ab+b^2 & \quad ab \quad +5-6d \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \left\{\begin{array}{l} 3a^2+4abc-\ bb+30 \\ 2bb-3a^2\ -2abc-25 \\ \ dd+2a^2\ -3abc-3 \end{array}\right. \\ \hline \text{Summe} & 2a^2-abc+b^2+a^2+2 \end{array}$$

§. 15.

Die Subtraction geſchieht in der Algebra, wie in der gemeinen Rechenkunſt, wenn die Größen von einerley Art, und wenn die Zeichen von einerley Art ſind, und wenn die kleinere Größe von der größern Größe abgezogen werden kann. Z. E.

$$\begin{array}{ll} & 8a-3b+7c-8d+4f \\ & 5a-2b+6c-3d+2f \\ \hline \text{Reſt} & 3a-\ \ b+\ \ c-5d+2f \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & 5ab-9bd-3dc-fg \\ & 2ab+3bd-2dc-fg \\ \hline \text{Reſt} & 3ab+6bd-\ \ dc-- \end{array}$$

§. 16.

§. 16.

In dem Fall aber, wenn die Grôßen einerley Zeichen haben, und man die grôßere Grôße von der kleinern Grôße abziehen ſoll, ſo ziehe man die kleinere von den grôßern ab, und zu dem Reſt ſetze man das Zeichen +, wenn beyde — haben; hingegen —, wenn beede Grôßen + haben.

Zum Exempel.

$$\begin{array}{r} 4a - 3b + 7c - 2d \\ 6a - 4b + 9c - 5d \\ \hline -2a + b - 2c + 3d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25abc - 3cd + 13fa \\ 28abc - 9cd + 24fa \\ \hline -3abc + 6cd - 11fa \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5gh + 2ahcde - 18bf - 4ab \\ 7gh + 5ahcde - 27bf - 6ab \\ \hline -2gh - 3ahcde + 6bf + 2ab \end{array}$$

§. 17.

Sind die Zeichen verſchieden, ſo addire man die Grôßen, die man ſubtrahiren ſoll, und der Summe gebe man das Zeichen derjenigen Grôße, von welcher die Subtraction geſchehen ſoll. Z. E.

$5a + 7b$

$$\begin{array}{r} 5a+7b-3c+9d \\ -\;3a-2b+2c-4d \\ \hline 8a+9b-5c+13d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\;ab-3bc+8ad \\ +4ab-3ad+4bc \\ \hline -5ab+11ad-7bc \end{array}$$

Exempel für alle drey Fälle.

Von	$2a$	$-2a$	$-15bc$	$5a+12b$
ſubtrahire man	a	$+3a$	$-8bc$	$2a+7b$
ſo iſt der Reſt	a	$-5a$	$-7bc$	$3a+5b$

Von	bc	$-2abd$
ſubtrahire man	$-6bc$	$+7abd$
ſo iſt der Reſt	$+7bc$	$-9abd$

Von	$4ab-9$	$a^2-2ab+b^2$
ſubtrah. man	$12ab+7bc-24$	$-4ab$
ſo iſt der Reſt	$-8ab-7bc+15$	$a^2+2ab+b^2$

Von	$ab+5-6d$
ſubtrahire man	$-7ab-bc+42-6d$
ſo iſt der Reſt	$8ab+bc-37$

Von	$2a+2b$	$a+b$	$5bc+3ad$
ſubtrahire man	$-5a+7b$	$a-b$	$5bc-4ad$
ſo iſt des Reſt	$7a+5b$	$+2b$	$-7ad$

Von	$8a+5bd+25$	$c+13$
ſubtrah. man	$7a-3bd-12$	$3a-b-2c$
ſo iſt der Reſt	$a+8bd+37$	$3c+13-3a+b$

§. 18.

Bey der Multiplication hat man vier Fälle zu beobachten.

Erſter Fall. Wenn vor den Buchſtaben, welche mit einander ſollen multiplicirt werden, einerley Zeichen ohne Coeficient ſtehen, ſo ſchreibt man dieſe Buchſtaben neben einander mit dem Zeichen +, wie man hier ſieht.

Zum Exempel.

Multiplicandus	a	$-a$	$a+b$	$-a-b$
Multiplicator	a	$-b$	d	$-d$
Produkt	aa	$+ab$	$ad+bd$	$ad+bd$

Zweyter Fall. Wenn die Buchſtaben Coeficienten vor ſich haben, ſo multiplicire man dieſe durch einander, und ſetze das Produkt der Coeficienten vor dem Produkt der Buchſtaben.

Zum Exempel.

Multiplicandus	$5a$	$-6d$	$3a+2b$
Multiplicator	$3b$	$-7b$	6
Produkt	$15ab$	$+42bd$	$18a+12b$

Multiplicandus	$a+b$
Multiplicator	$5b$
Produkt	$5ab+5bb$

Dritter Fall. Wenn der Multiplicandus und Multiplicatore verſchiedene Zeichen vor ſich haben,

haben, ſo bekömmt das Produkt das Zeichen (—).

Zum Exempel.

Multiplicandus	a	$-6d$	$4a - 7b$
Multiplicator	$-b$	$+7a$	$+3f$
Produkt	$-ab$	$-42ad$	$12af - 21bf$

Vierter Fall. Wenn ein Buchſtabe, welcher einen Exponenten bey ſich hat, mit eben demſelben Buchſtaben (als b mit b), der gleichfalls einen Exponenten hat, ſoll multiplicirt werden; ſo wird im Produkt dieſer Buchſtabe nur einmal geſchrieben, die Exponenten aber werden addirt, daß alſo die Summe beyder Exponenten der neue Exponent wird.

Zum Exempel.

Multiplicand.	b^2	$a^3 - b$	$-c + 3b^2$
Multiplicator	b^3	b^2	$+3c^2$
Produkt	b^5	$a^3b^2 - b^3$	$+3c^3 - 9b^2c^2$

Wenn der Multiplicator aus mehreren Gliedern beſteht, ſo müſſen alle Glieder des Multiplicandus durch ein jedes Glied des Multiplicators multiplicirt werden. Man bekommt alſo ſo viele Partialprodukte, als viele Glieder der Multiplicator hat. Dieſe Partialprodukte müſſen alsdenn zuſammen addirt werden, und die Summe iſt alsdenn das verlangte ganze Produkt. Zum Exempel.

Geſetzt:

Geſetzt: dieſe zwo Größen $2a + b - d$ und $a - b$ ſollen mit einander multiplicirt werden, ſo ſchreibe man die letzte Größe, als den Multiplicator unter die erſte, wie unten ſteht; hat man eine Linie darunter gezogen, ſo multiplicire man mit a als dem erſten Gliede des Multiplicators alle Glieder des Multiplicandus, und ſo entſteht das erſte Partialprodukt $2a^2 + ab - ad$. Ferners multiplicire man mit dem zweyten Gliede des Multiplicators $(-b)$ alle Glieder des Multiplicandus, und ſo bekommt man das zweyte Partialprodukt $-2ab - b^2 + bd$. Addirt man beyde Partialprodukte zuſammen, ſo iſt die Summe $2a^2 - ad - b^2 + bd$ das verlangte ganze Produkt.

Multiplicand. $2a + b - d$
Multiplicator $a - b$

$2a^2 + ab - ad$ das erſte Partialprodukt.
$-2ab - bb + bd$ das zweyte Partialprodukt.

$2a^2 - ab - ad - bb + bd$ das ganze Produkt.

Ueberhaupts, wenn Größen mit einerley oder mit verſchiedenen Zeichen multiplicirt werden ſollen, ſo iſt die allgemeine Regel dieſe. Gleiche Zeichen geben +, verſchiedene aber geben —. Z. E.

$$a + b + c$$
$$a + b + c$$
$$aa + ab + ac$$
$$+ ab + bb + bc$$
$$+ ac + bc + cc$$
$$aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc$$

$$a + b - c$$
$$a - b - c$$
$$aa + ab - ac$$
$$- ab - bb + bc$$
$$- ac - bc + cc$$
$$aa - bb - 2ac + cc$$

$$4a - 3b$$
$$3a + 2b$$
$$12aa - 9ab$$
$$+ 8ab - 6bb$$
$$12aa - ab - 6bb$$

$$- 5b - 3c + 4d$$
$$- 2d + b - c$$
$$+ 10bd + 6cd - 8dd$$
$$- 5bb - 3cb + 4bd$$
$$+ 5cb + 3cc - 4cd$$
$$+ 14bd + 2cd - 8dd - 5bb + 2cb + 3cc$$

Mul-

$2ab - 4ac + ad$ Multiplicandus
$3ab - 5ac + 2ad$ Multiplicator

$$\begin{array}{l} 6a^2b^2 - 12a^2bc + 3a^2bd \\ \qquad - 10a^2bc + 20a^2c^2 - 5a^2cd \\ \qquad\qquad + 4a^2bd - 8a^2cd + 2a^2d^2 \end{array} \Bigg\} \text{Partialprodukt.}$$

$$6a^2b^2 - 22a^2bc + 7a^2bd + 20a^2c^2 - 13a^2cd$$
$+ 2a^2d^2$ das ganze Produkt.

$$\begin{array}{l} 5b^3a - 2ab^3 + 4a^2c^2 \\ 2a^3b - ab^3 + 3a^2c^2 \\ \hline 10a^6b^2 - 4a^4b^4 + 8a^5bc^2 \\ \qquad - 5a^4b^4 + 2a^2b^6 - 4a^3b^3c^2 \\ \qquad\qquad + 15a^5bc^2 + 6a^3b^3c^2 + 12a^4c^4 \\ \hline 10a^6b^2 - 9a^4b^4 + 23a^5bc^2 + 2a^2b^6 - 10a^3b^3c^2 \\ \qquad + 12a^4c^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2a^4x^2 - 3b^4y^2 \\ 2a^4x^2 + 3b^4y^2 \\ \hline 4a^8x^4 - 6a^4x^2b^4y^2 \\ \qquad + 6a^4x^2b^4y^2 - 9b^8y^4 \\ \hline 4a^8x^4 - : - : - 9b^8y^4. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4ab + 3ac - c^2 \\ -5ab + 3ac - c^2 \\ \hline -20a^2b^2 - 15a^2bc + 5abc^2 \\ \qquad + 12a^2bc + 6a^2c^2 - 3ac^3 \\ \qquad\qquad - 4abc^2 - 3ac^3 + c^4. \\ \hline -20a^2b^2 - 3a^2bc + abc^2 + 6a^2c^2 - 6ac^3 + c^4 \end{array}$$

§. 19.

Daß + mit + multiplicirt wieder + im Produkt geben müſſe; ingleichen + mit — oder — mit + das Zeichen — gebe, iſt nicht ſchwer zu begreifen. Daß aber — mit — multiplicirt in dem Produkte + iſt, ſcheint nicht ſogleich klar zu ſeyn. Durch ein Exempel in Zahlen kann dieſe Schwierigkeit am beſten gehoben werden. Z. E. Man ſoll 4 — 3 durch — 3 multipliciren, das heißt, man ſoll den Mangel — 3 ſo vielmal nehmen, als 4 — 3 Einheiten hat, das iſt, 1 mal. Weil, wenn man Anfangs 4 mit — 3 multiplicirt, man den Mangel 4 mal und folglich dreymal zuviel genommen, ſo muß man denſelben wieder dreymal addiren, folglich giebt — 3 mit — 3 zum Produkt + 9.

§. 20.

Die Multiplication iſt immer die Probe über die Diviſion, das heißt, wenn man den Diviſor mit dem Quotienten multiplicirt, ſo muß der Dividendus herauskommen. Hieraus folgt nun ganz natürlich, daß bey der Diviſion die nämliche Regel ſtatt finden muß, wie bey der Multiplication, nämlich: Einerley Zeichen geben + ungleiche oder verſchiedene Zeichen aber geben. — Z. E. Man ſoll die Größe *a b* durch *a* dividiren, ſo muß der Quotient *b* ſeyn, weil *a* mit *b* multiplicirt

zum

zum Produkte $a\,b$ giebt; und hieraus folgt auch, daß, wenn $a\,b$ durch b dividirt werden ſoll, der Quotient a ſeyn müſſe.

Oder:

Die Diviſion iſt der Multiplication entgegengeſetzt: ſie hat ebenfalls vier verſchiedene Fälle.

Erſter Fall. Wenn der Dividendus und Diviſor beyde einerley Zeichen, und keine Coefficienten haben, ſo werden jene Buchſtaben des Dividendus, welche auch im Diviſor ſich einfinden, ausgelöſcht: die übergebliebenen Buchſtaben des Dividendus mit dem Zeichen + ſind der Quotient.

Zum Exempel.

Dividendus	ab	$-ab$	$ad+bd$	$-ad-bd$
Diviſor	b	$-b$	d	$-d$
Quotient	a	$+a$	$a+b$	$a+b$

Zweyter Fall. Wenn die Zeichen des Dividendus und des Diviſors verſchieden ſind, ſo ſetze man vor dem Quotienten das Zeichen. —

Zum Exempel.

Divid.	$-ab$	$-ab$	$-ab-bd$	$abc+bcd+bcf$
Diviſ.	$+a$	$-a$	$+b$	$-bc$
Quot.	$-b$	$-b$	$-a-d$	$-a-d-f$

Dritter Fall. Wenn die Buchſtaben des Dividendus und des Diviſors Coeficienten vor ſich haben, ſo werden dieſe durch einander dividiret, wie in der gemeinen Arithmetik.

Zum Exempel.

Dividendus	$15ab$	$42bd$	$12af-21bf$
Diviſor	$3a$	$-7b$	$3f$
Quotient	$5b$	$-6d$	$4a-7b$

Vierter Fall. Wenn ein Buchſtabe in dem Dividendus und Diviſor ſteht, und einen Exponenten hat, ſo wird der Exponent des Diviſors von dem Exponenten des Dividendus abgezogen, und in dem Quotienten eben dieſer Buchſtabe geſchrieben mit einem Exponenten, der dem Reſte gleich iſt.

Zum Exempel.

Dividendus	a^3	b^4c^2	$+b^3c$	$-8b^5c^3d$
Diviſor	a^2	b^2c	$-b$	$+4b^3c^3$
Quotient	a	b^2c	$-b^2c$	$-2b^2d$

Erſte Anmerkung. In dieſen letzten Exempel ſieht man, daß, wenn ein Buchſtabe in dem Diviſor und Dividendus den nämlichen Exponenten hat, derſelbe in dem Quotienten gar nicht geſchrieben wird.

Zweyte Anmerkung. Wenn ſowohl die Buchſtaben als Coeficienten des Dividendus und

und Diviſors die nämlichen ſind, ſo iſt der Quotient 1.

Zum Exempel.

Dividendus	ab	$7ab + 5bc$	$8ab + 4d$
Diviſor	ab	$7ab + 5bc$	$-8ab - 4d$
Quotient	1	1	-1

Dritte Anmerkung. Wenn der Diviſor einen Buchſtaben hat, der nicht in dem Dividendus ſteht, oder wenn ein Buchſtabe in dem Diviſor einen größern Exponenten hat, oder endlich, wenn der Coeficient des Diviſors nicht genau und ohne Reſt in dem Coeficienten des Dividendus enthalten iſt, ſo kann die Diviſion nicht genau verrichtet werden. In dieſem Falle ſchreibt man den Dividendus und Diviſor auf die Art eines Bruchs unter einander.

Zum Exempel.

Dividendus	$8ab$	$5ab$	$5a$
Diviſor	$4ac$	$5a^2b$	$3a$
Quotient	$\frac{8ab}{4ac}$	$\frac{5ab}{5a^2b}$	$\frac{5a}{3a}$

§. 21.

In dem Fall aber, wenn die Diviſion nicht wirklich vorgenommen werden kann, ſo ſchreibt man die Größen als einen Bruch.

z. Ex. $\frac{a}{b}$ heißt ſoviel, als a ſoll durch b dividirt werden.

Dieſe Regeln zu beweiſen, iſt nicht nöthig, weil es faſt eben ſo geſchehen kann, wie in der Multiplication. Es wird einem jedem leicht ſeyn, die dort gegebenen Beweiſe hier anzuwenden. Die vier Regeln ſind hinlänglich, ſo oft der Diviſor nur aus einem Gliede beſteht: hat er aber mehrere Glieder, ſo merke man folgendes:

Ordnung halber ſchreibe man erſtens den Diviſor zu der Linken des Dividendus, und ſcheide beyde durch einen Verticalſtrich, oder durch eine halbe Kreislinie. Zweytens, aus dem Dividendus wähle man was immer ein Glied, welches genau durch ein Glied des Diviſors, ſey es ebenfalls, was für eines es wolle, kann dividirt werden. Den Quotienten, der aus dieſer Diviſion entſteht, ſchreibe man zur Rechten des Dividendus, nachdem man zuvor einen halben Kreis gezogen hat. Drittens, mit dem Quotient, den man alſo gefunden hat, multiplicire man den ganzen Diviſor: das Produkt wird unter den Dividendus geſchrieben, und davon abgezogen, oder, welches eines iſt, das Produkt wird mit Veränderung aller Zeichen angeſchrieben, und alsdenn zu dem Dividendus addirt: alſo bekommt man einen neuen Dividendus. Viertens, aus dieſem

ſem wähle man ſich wieder ein Glied, welches taugt, durch ein frey erwähltes Glied des Diviſors genau dividirt zu werden. Der Quotient wird abermal zur Rechten neben den vorigen hin geſchrieben mit ſeinem gehörigen Zeichen: und ſo fährt man immer fort, bis nach der Subtraction nichts mehr übrig bleibt. Dieß alles wird in einem Exempel verſtändlicher werden.

Es ſey der Dividendus $ab^2 + abd + acd - ac^2$, der Diviſor $ab + ad - ac$. Schreibe man beyde neben einander, wie man unten ſieht. Dividire man ein Glied des Dividendus, z. Ex. ab^2 durch ein Glied des Diviſors, welches zur genauen Diviſion tauglich iſt, als ab. Den Quotienten b ſetze man zur Rechten. Mit dieſem Quotienten b multiplicire man den ganzen Diviſor, das Produkt wird ſeyn $ab^2 + abd - abc$: dieſes ſchreibe man unter den Dividendus, aber mit Veränderung aller Zeichen: man wird alſo unterſchreiben $- ab^2 - abd + abc$. Nach gezogener Linie addire man dieſes zu dem Dividendus, ſo entſteht ein neuer Dividendus $abc + acd - ac^2$. Was immer für ein Glied deſſelben, z. Ex. durch acd dividire man durch ein Glied des Diviſors, welches zu einer genauen Diviſion taugt, z. E. durch ad. Den Quotienten $+ c$ ſetze man neben den vorhergefundenen Quotienten hin. Durch dieſen neuen Quotienten multiplicire man den ganzen Diviſor. Das

 Pro-

Produkt $abc + acd - ac^2$ ſchreibe man mit veränderten Zeichen unter den Dividendus. Nach verrichteter Addition bleibt nichts übrig. Die Diviſion iſt alſo vollbracht, und $b + c$ iſt der verlangte Quotient.

$$\begin{array}{r|c|l} \text{Diviſor} & \text{Dividendus} & \text{Quot.} \\ ab+ad-ac & ab^2 abd+acb-ac^2 & b+c \\ & -ab^2-abd+abc & \\ \hline & abc+acb-ac^2 & \\ & -abc-acd+ac^2 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

§. 22.

Soll eine zuſammengeſetzte Formel durch eine einfache getheilt werden; ſo theile man ein jedes Glied beſonders. Z. Ex. Es ſoll $6a - 8b + 4c$ durch 2 getheilt werden; ſo giebt der Quotient $3a - 4b + 2c$ und die Rechnung ſteht: $2 \mid 6a - 8b + 4c \mid 3a - 4b + 2c$.

oder allgemein:

$$\begin{array}{r|c|l} a & aa - 2ab & a - 2b \\ & aa - 2ab & \\ \hline & \cdot\cdot \quad \cdot\cdot & \end{array}$$

§. 23.

Iſt aber der Diviſor ſelbſt eine zuſammengeſetzte Größe, ſo hat die Diviſion mehr Schwierigkeiten, weil dieſelbe öfters wirklich geſche-

geſchehen kann, wo es nicht zu vermuthen iſt. Z. E.

Es ſey der Diviſor $a-b$, und das Dividend $ac-bc$; ſo muß c der Quotent ſeyn, und das Exempel wird alſo ſtehen:

$$\begin{array}{r|l|l} a-b & ac-bc & c \\ & ac-bc & \\ \hline & \cdot \quad \cdot & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} 2a-3b & 6aa-9ab & 3a \\ & 6aa-9ab & \\ \hline & \cdot \quad \cdot & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} a+b & aa+3ab+2bb & a+2b \\ & aa+\ ab & \\ \hline & \cdot\ +2ab+2bb & \\ & \quad +2ab+2bb & \\ \hline & \quad \cdot \quad \cdot & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} a+b & aa-bb & a-b \\ & aa+ab & \\ \hline & \cdot -ab-bb & \\ & \quad -ab-bb & \\ \hline & \quad \cdot \quad \cdot & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} 3a-2b & 18aa-\ 8bb & 6a+4b \\ & 18aa-12ab & \\ \hline & \quad +12ab-8bb & \\ & \quad +12ab-8bb & \\ \hline & \quad \cdot \quad \cdot & \end{array}$$

In

Auf dieſe Weiſe zu dividiren könnte einen Anfänger verwirren, wie er in dem Dividendus und Diviſor allezeit ſolche Glieder finden könne, welche zu einer genauen Diviſion taugen. Dieſer Beſchwerniß zuvor zu kommen oder abzuhelfen, merke man folgendes. Erſtens: erwähle man nach Belieben einen Buchſtaben, welcher ſowohl in dem Dividendus als Diviſor befindlich iſt, und ordne man alle Glieder des Dividendus und Diviſors nach dieſem Buchſtaben alſo, daß jenes das erſte Glied ſey, in welchem dieſer Buchſtabe den gröſsten Exponenten hat; das zweyte Glied jenes, indem dieſer Buchſtabe einen Exponenten hat, der dem gröſsten am nächſten kömmt u. ſ. f. Zweytens: dividire man alsdenn immer das erſte Glied des Dividendus durch das erſte Glied des Diviſors: in dem übrigen fahre man fort, wie oben iſt geſagt worden.

Anmerkung.

Wenn man durch die Addition einen neuen Dividendus erhält, muß man jederzeit ſorgen, daß er nach eben demſelben Buchſtaben, den man Anfangs erwählet hat, geordnet bleibe: läßt ſich alsdenn das erſte Glied des Dividendus durch das erſte Glied des Diviſors nicht genau theilen, ſo iſt es ein richtiges Zeichen, daß der gegebene Dividendus durch den gegebenen Diviſor nicht genau könne dividirt werden. Wir wollen einige Exempel herſetzen,

ſetzen, in welchen der Dividendus und Diviſor ſchon nach einem gewiſſen Buchſtaben geordnet ſind: im erſten nach x: im zweyten nach c; im dritten nach a.

Diviſor	Dividendus	Quotient
$2c^2+3bc-b^2$	$4c^4-9b^2c^2+6b^3c-b^4$	$2c^2-2bc+b^2$

$$
\begin{array}{r}
4c^4-9b^2c^2+6b^3c-b^4 \\
-4c^4-6b\,c^3+2b^2c^2 \\
\hline
-6b\,c^3-7b^2c^2+6b^3c-b^4 \\
+6b\,c^3+9b^2c^2-3b^3c \\
\hline
2b^2c^2+3b^3c-b^4 \\
-2b^2c^2+3b^3c+b^4 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Diviſor	Dividendus	Quotient.
$a^2-2ab+6b^2$	$2a^4-7a^3b+22a^2b^2-26ab^3+24b^4$	$2a^2-3ab+4b^2$

$$
\begin{array}{r}
2a^4-7a^3b+22a^2b^2-26ab^3+24b^4 \\
-2a^4+4a^3b-12a^2b^2 \\
\hline
-3a^3b+10a^2b^2-26ab^3+24b^4 \\
+3a^3b-6a^2b^2+18ab^3 \\
\hline
4a^2b^2-8ab^3+24b^4 \\
-4a^2b^2+8ab^3-24b^4 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Div.	Dividend.	Quotient.
$x-3$	x^5-243	$x^4+3x^2+9x^2+27x+81$
	$-x^5+3x^4$	

$$3x^4-243$$
$$-3x^4+9x^3$$

$$9x^3-243$$
$$-9x^3+27x^2$$

$$27x^2-243$$
$$-27x^2+81x$$

$$81x-243$$
$$-81x+243$$

$$0$$

Dritter Abſchnitt.

Von den Brüchen.

§. 24.

Ein Bruch iſt ein gewiſſer Theil eines Ganzen: z. Ex. es ſoll a durch b getheilt werden; ſo wird der Quotient $\frac{a}{b}$ angedeutet, welche Schreibart man einen Bruch nennt, wovon die obere Größe der Zähler, die untere aber der Nenner heißt.

§. 25.

Alle Brüche, in welchen der Zähler größer iſt als der Nenner, heißen unächte Brüche: hingegen alle Brüche, deren Zähler kleiner iſt als der Nenner, nennt man ächte Brüche.

§. 26.

Je größer der Nenner wird, deſto kleiner wird der Bruch; und obgleich der Nenner noch ſo groß angenommen wird, ſo verſchwindet der Bruch doch niemals ganz, oder wird niemals zu nichts.

§. 27.

Wird der Nenner eines Bruchs ſo weit vergrößert, daß er ſich über alle Begriffe der menſch-

menſchlichen Einſicht erſtreckt, ſo ſagt man, der Bruch ſey unendlich groß: welches Wort unendlich ſoviel bedeutet, daß man mit dem gemeldten Bruch niemals zu Ende komme. Das Zeichen ∞ zeigt eine unendlich große Zahl an: und dieſer Begriff vom Unendlichen iſt deſto ſorgfältiger zu bemerken, weil er in der Folge von der größten Wichtigkeit iſt.

Von der Addition und Subtraction der Brüche.

§. 28.

Haben die Brüche einerley Nenner, ſo hat die Addition, ingleichem die Subtraction derſelben ganz und gar keine Schwierigkeit, und es mögen ſoviel Brüche vorhanden ſeyn, als immer wollen, ſo werden dieſelbe blos durch das Zeichen + zuſammengezählt. Z. Ex.

$$\frac{a}{b} + \frac{2c}{b} + \frac{3d}{b} = \frac{a+2c+3d}{b}$$

§. 29.

Sind aber die Nenner ungleich, ſo müſſen die Brüche in andere verwandelt werden, deren Nenner einander gleich ſind. Auf die allgemeine Art wird dieſes folgendermaſſen verrichtet. Es ſeyen zum Exempel die vorgegebenen

benen Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Man multiplicire nämlich den erſten Bruch oben und unten, oder welches einerley iſt, den Zähler und Nenner des erſten Bruches, mit dem Nenner des andern Bruches d, ſo heißt der neue Bruch $\frac{ad}{bd}$, welcher Bruch eben ſo groß als $\frac{a}{b}$ iſt. Hierauf multiplicire man den Zähler und Nenner des andern gegebenen Bruches mit b, ſo erhält man $\frac{bc}{bd}$, welcher eben ſo groß als $\frac{c}{d}$ iſt, und folglich ſind die beyden Brüche unter einerley Benennung gebracht. Sollen dieſe beyden Brüche zuſammen addirt werden, ſo iſt ihre Summe $\frac{ad + bc}{bd}$; und der Unterſchied, wenn dieſelbe von einander ſollen ſubtrahirt werden, iſt $\frac{ad - bc.}{bd.}$

Von der Multiplication und Diviſion der Brüche.

§. 30.

Sollen Brüche mit ganzen Zahlen oder Größen multiplicirt werden, ſo wird blos der Zähler des Bruches mit der gegebenen Größe

multiplicirt, und der Nenner bleibt unverändert. Z. Ex. Es ſoll der Bruch $\frac{a}{b}$ mit c multiplicirt werden, ſo iſt das Produkt $\frac{ac}{b}$.

§. 31.

Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden, ſo darf man nur den Nenner deſſelben mit der gegebenen Zahl oder Größe multipliciren, und den Zähler unverändert laſſen. Z. E. Es ſoll der Bruch $\frac{a}{b}$ durch c multiplicirt werden, ſo iſt der geſuchte Quotient $\frac{a}{bc}$.

§. 32.

Bey Multiplicirung eines Bruches mit einem andern Bruch iſt weiter nichts zu beobachten, als daß man erſtlich die Zähler, und hernach die Nenner mit einander multiplicirt. Z. Ex. Es ſoll der Bruch $\frac{a}{b}$ mit dem Bruch $\frac{c}{d}$ multiplicirt werden; ſo iſt das geſuchte Produkt $\frac{ac}{bd}$.

§. 33.

Bey Dividirung eines Bruches in einen andern geſchieht die Diviſion blos in dem Zähler, wenn die Brüche gleiche Nenner haben. Haben aber die Brüche ungleiche Nenner, ſo multiplicire man den Zähler des Dividens mit dem Nenner des Diviſors, und den Nenner des Dividends mit dem Zähler des Diviſors, ſo giebt jenes Produkt den Zähler, und dieſes den Nenner zum Quotienten. Z. Ex. Man ſoll den Bruch $\frac{a}{b}$ durch den Bruch $\frac{c}{d}$ dividiren, ſo iſt $\frac{ad}{bc}$ der Quotient.

§. 34.

Eben dieſe Regel für die Diviſion kann noch bequemer eingerichtet werden. Man kehre nämlich den Bruch, mit dem dividirt werden ſoll, um, ſo daß deſſelben Nenner oben, und deſſen Zähler unten ſteht. Alsdenn multiplicire man mit dieſem umgekehrten Bruch den gegebenen Bruch, in welchen dividirt werden ſoll, ſo erhält man den Quotienten. Z. Ex. Man ſoll $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ dividiren, ſo iſt $\frac{d}{c}$ der umgekehrte Bruch; dieſer mit $\frac{a}{b}$ multiplicirt, giebt zum Produkt $\frac{ad}{bc}$, welches der geſuchte Quotient iſt.

Vierter Abſchnitt.

Von den Quadratzahlen, von Ausziehung der Wurzeln, und von den Irational-Größen.

§. 35.

Eine jede Größe in ſich multiplicirt giebt zum Produkt ein Quadrat, oder die andere Poteſtät oder Potenz, oder auch Dignität. Die Größen, daraus das Quadrat entſtanden, wird die Quadratwurzel genennt. Z. Ex. *a* mit *a* multiplicirt, giebt zum Produkt *aa*, oder das Quadrat, und *a* iſt die Quadratwurzel.

36.

Multiplicirt man die andere Potenz mit der Wurzel, ſo giebt das Produkt die dritte Potenz oder Cubus. Multiplicirt man die dritte Potenz wieder mit der Wurzel, ſo kommt die vierte Potenz oder Dignität heraus, u. ſ. w.

§. 37.

Der Grad der Poteſtät oder Potenz oder Dignität einer Größe wird durch eine kleine Ziffer, wenn dieſelbe beſtimmt angegeben iſt; im Gegentheil, wenn dieſelbe nicht beſtimmt iſt, durch einen kleinen Buchſtaben oberhalb zur rechten Hand an diejenige Buchſtaben geſetzt mit welchen die Größen benennt ſind. Z Ex Die zweyte, dritte, vierte ꝛc. Dignität oder

auch n Dignität wird angedeutet, a^2, a^3, a^4, a^n. Dieſe Zahlen nennt man die Exponenten der Dignitäten.

§. 38.

Sowohl bey der Addition als auch bey der Subtraction werden verſchiedene Poteſtäten nur mit dem Zeichen + und — verbunden. Z. E. So iſt $a^3 + a^2$ die Summe von der dritten und zweyten Poteſtät der Größe a; und $a^5 - a^4$ iſt der Unterſchied oder der Reſt, wenn von der fünften Poteſtät die vierte Poteſtät ſubtrahirt wird: beydes kann aber nicht kürzer ausgedrückt werden. Kommen aber gleiche Poteſtäten vor, ſo ergiebt es ſich von ſelbſt, daß für $a^3 + a^3$ die Summe $2a^3$ geſchrieben werden muß.

§. 39.

Will man eine Dignität durch eine andere Dignität von eben der Wurzel multipliciren, ſo darf man nur ihre Exponenten zuſammen addiren. Z. Ex. Es ſoll a^2 mit a^3 multiplicirt werden, ſo iſt das Produkt $a^{2+3} = a^5$, a^n mit $a^m = a^{n+m}$.

§. 40.

Soll man eine Dignität mit einer andern Dignität dividiren, ſo darf man blos ihre Exponenten von einander ſubtrahiren. Z. Ex.

$$a^6 : a^2 = a^{6-2} = a^4$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

§. 41.

Soll die Dignität einer Größe zu einer andern Dignität erhoben werden, ſo multiplicire man den Exponenten der erſten mit den Exponenten der andern. Z. E. Man ſoll a^2 zur vierten Dignität erheben; ſo multiplicire man 2 mit 4, ſo iſt a^8 die geſuchte Dignität; oder x^m zu n, ſo iſt $x^{m.n}$ die geſuchte Dignität.

§. 42.

Die Wurzel aus einer gegebenen Dignität ausziehen, heißt, diejenige Größe finden, welche zu einer gewiſſen Dignität erhoben worden iſt: will man aus einer gegebenen Dignität eine verlangte Wurzel ziehen, ſo darf man nur ihren Exponenten durch den Exponenten der Wurzel dividiren. Z. E. Die Wurzel der vierten Dignität aus x^{12} iſt x^3 oder allgemein die Wurzel m aus x^n iſt $^{n:m}$

Anmerkung.

Wenn man aus einer Größe die Wurzel ausziehen ſoll, dergleichen ſie nicht hat, ſo ſetzt man folgendes Wurzelzeichen vor dieſelbe, und darüber den Exponenten der Wurzel, z. E. die Quadratwurzel von a, $\sqrt{a}$, die Cubicwurzel von $a\sqrt[3]{a}$, der ſechsten Dignität von $a\sqrt[6]{a}$ u. ſ. w.

§. 43.

Irrational-Größen ſind ſolche, welche keine Quadrate ſind, und aus welchen alſo die Quadratwurze nicht gezogen werden kann. Z. Ex. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$.

§. 44.

Die Irrational-Größen haben entweder einerley Benennung oder nicht. Iſt letzteres, ſo müſſen die Irrational-Größen von verſchiedener Benennung zu einerley Benennung gebracht werden. Dieſes geſchieht, wenn man die Exponenten unter einerley Benennung bringt, und die dadurch gefundenen Brüche in die Stelle der Exponenten ſchreibt. Z. Ex. Es ſeyen $x^{n:m}$ und $y^{r:s}$ die gegebenen Irrational-Größen; ſo iſt $x^{n:m} + y^{r:s} = x^{ns:ms} + y^{mr:ms}$ $= \sqrt[ms]{x^{ns}} + \sqrt[ms]{y^{mr}}$.

§. 45.

Wenn zwey, drey, auch auch mehrere Irrational-Formeln zuſammen addirt werden ſollen, ſo ſetze man alle Glieder mit ihren Zeichen zuſammen. Z. E. Zu $\sqrt{a}$ ſoll $\sqrt{a}$ addirt werden, ſo iſt die Summe $\sqrt{a} + \sqrt{a}$ oder abgekürzt $2\sqrt{a}$.

§. 46.

Bey der Subtraction der Irrational-Gröſ-ſen iſt die Berechnung gar nicht ſchwer, indem man nur die Zeichen der untern Größe verkehrt leſen darf. Z. E.

$$\begin{array}{r} 4 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{6} \\ 1 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{5} + 6\sqrt{6} \\ \hline 3 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{6} \end{array}$$

§. 47.

Die Multiplication einer Irrational-Größe $\sqrt[m]{a^n}$ mit einer andern $\sqrt[m]{b^r}$ von einerley Art geſchieht, wenn man

1) die Größe unter dem Wurzelzeichen (a^n und b^r) durch einander multiplicirt, und

2) das Produkt vor das Wurzelzeichen mit ſeinen Exponenten ſetzt, ſo iſt

3) das Produkt $\sqrt[m]{a^n\, b^r}$.

§. 48.

Soll eine Irrational-Größe $\sqrt[m]{a}$ durch eine andere $\sqrt[m]{b}$ dividirt werden, ſo darf man ſolche nur als einen Bruch anſetzen. Z. E.

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

Fünf-

Fünfter Abſchnitt.

Von den Proportionen und Progreßionen.

§. 49.

Entweder ſind zwey Größen einander gleich, oder ſie ſind einander ungleich. Wenn im letzten Fall die eine Größe größer iſt als die andere Größe, und man ſoll ihre Ungleichheit beſtimmen, ſo kann dieſes auf zweyerley Art geſchehen: denn einmal fragt man: um wie viel die eine Größe größer ſey, als die andere Größe; oder zweytens fragt man, um wievielmal die eine Größe größer ſey, als die andere Größe. Beyderley Beſtimmung heißt ein Verhältniß; und zwar im erſten Fall ein arithmetiſches, im andern Fall hingegen ein geometriſches Verhältniß.

§. 50.

Der Unterſchied zwiſchen zwey gegebenen Größen wird durch das arithmetiſche Verhältniß beſtimmt. Hieraus folgt nun, daß hierzu drey Stücke erfordert werden: nämlich erſtens, die größere, zweytens, die kleinere Größe, und drittens, der Unterſchied.

§. 51.

Iſt a die größere, b die kleinere Größe, und d der Unterſchied, ſo findet man d, wenn man von a das b abzieht, folglich iſt $d = a - b$.

§. 52.

Iſt die kleinere Größe b nebſt dem Unterſchied d gegeben, und man ſoll die größere Größe a finden, ſo addire man d zu b, ſo iſt $a = b + d$.

§. 53.

Um die kleinere Größe b zu finden, ſo ſubtrahire man von der größern Größe a den Unterſchied d, ſo iſt $b = a - d$.

§. 54.

Addirt oder ſubtrahirt man zu den beyden gegebenen Größen eine beliebige Zahl, ſo bleibt der Unterſchied der nämliche. Z. E.

$(a+c)-(b+c) = d$, $(a-c)-(b-c) = d$.

§. 55.

Werden aber die beyden gegebenen Größen durch oder mit einer beliebigen Zahl multiplicirt, ſo wird auch der Unterſchied um ſo vielmal größer, als die Größen vervielfältiget worden ſind: Z. E.

$a-b = d$, $2a-2b = 2d$ oder $na-nb = nd$.

§. 56.

Vier Größen, die ſo beſchaffen ſind, daß zwiſchen der erſten und zweyten einerley Unterſchied, wie zwiſchen der dritten und vierten Größe iſt, ſo machen dieſelbe eine arithmetiſche Proportion aus.

§. 57.

§. 57.

Eine ſtäte (continua) Proportion iſt eine ſolche, in welcher das zweyte Glied zweymal vorkommt, ſo, daß es zugleich das Antecedens der erſten Verhältniß, und das Conſequens der zweyten iſt. Z. E.

$$a \underline{+} b = b \underline{+} c.$$

§. 58.

In einer jeden arithmetiſchen Proportion iſt die Summe der beyden äußern Glieder, der Summe der beyden mittlern gleich: oder welches einerley iſt; die Summe des erſten und vierten Gliedes iſt immer eben ſo groß, als die Summe des zweyten und dritten Gliedes. Z. E. Es ſey a das erſte, b das zweyte, c das dritte und d das vierte Glied, ſo iſt die Proportion:

$$a + b = c + d, \quad \text{folglich}$$
$$a + d = b + c.$$

§. 59.

In einer ſtäten arithmetiſchen Proportion iſt die Summe der beyden äußern Glieder dem zweymal genommenen mittlern Gliede gleich. Z. E. Es ſeyen a und c die äußern Glieder, und b das mittlere, ſo iſt

$$a + b = b + c, \quad \text{oder}$$
$$a + c = 2b.$$

§. 60.

Es ſind in einer arithmetiſchen Propor-tion drey Glieder gegeben, wie kann man das vierte Glied finden?

Aufloͤſung.

Es ſeyen die drey erſten Glieder a, b, c gegeben, man ſoll daraus das vierte d finden, ſo iſt daſſelbe $d = b + c - a$, das iſt, man addire das zweyte und dritte, und von der Summe ziehe man das erſte ab, ſo giebt der Reſt das vierte Glied.

2) Es ſey das erſte a, das zweyte b und das vierte Glied d gegeben, man ſoll das drit-te c finden, ſo iſt daſſelbe $c = a + d - b$, das iſt, das dritte Glied iſt gleich der Summe der beyden aͤußern Gliede weniger dem zweyten Glied.

3) Es ſey das zweyte Glied b, das dritte c und das vierte d gegeben, wie groß iſt das erſte a? $a = b + c - d$, das iſt, die Sum-me der beyden mittleren Glieder, weniger dem letzten iſt das erſte Glied.

4) Es ſey das Glied a, das dritte c und das vierte d gegeben, ſo iſt das zweyte $b = c - d + a$, das iſt, zu dem Unterſchied zwi-ſchen dem dritten und vierten das erſte Glied addirt, giebt das zweyte b.

§. 61.

In einer ſtäten arithmetiſchen Propor⸗tion ſind die beyden äußern Glieder gegeben, wie kann man das mittlere finden?

Auflöſung.

Man addire das erſte und letzte Glied, und die Summe dividire man durch 2, ſo iſt der Quotient das verlangte mittlere Glied. Z. E. Es ſey das erſte Glied a, das letzte Glied c; ſo iſt nach §. 51. die Summe $a + c = 2\,b$, folglich $1\,b$ das mittlere Glied.

§. 62.

Iſt in einer ſtäten arithmetiſchen Pro⸗portion eines von den äußern nebſt dem mittlern gegeben, wie findet man das an⸗dere äußere?

Auflöſung.

Es ſey a das erſte Glied, und b das mitt⸗lere; ſo dupplire man das mittlere, und von dem Produkt ziehe man das gegebene äußere ab, ſo giebt der Reſt das andere äußere, und ſo wird c das andere äußere geſuchte Glied ſeyn $= c = 2b - a$.

§. 63.

Eine Reihe der Größen, welche immer um gleichviel wächst, oder abnimmt, es mag

dieſelbe aus ſoviel Gliedern beſtehen, als ſie immer will, nennt man eine arithmetiſche Progreßion.

§. 64.

Diejenige Größe, um welche die Glieder einer arithmetiſchen Progreßion größer oder kleiner werden, heißt man die Differenz oder Unterſchied. Wenn alſo das erſte Glied $= a$, und die Differenz $= d$, ſo wird die arithmetiſche Progreßion ſo zu ſtehen kommen: als:

$a.\ a \pm d.\ a \pm 2d.\ a \pm 3d.\ a \pm 4d.$ u. ſ. w.

Das Zeichen $+$ gilt für die aufſteigende, und das Zeichen $-$ für die niederſteigende Progreßion.

§. 65.

Hieraus ergiebt ſich ganz klar und deutlich, daß man ein jegliches Glied einer arithmetiſchen Progreßion finden könne, ohne daß man nöthig hat, die vorhergehenden Glieder zu wiſſen, und dieſes blos aus dem erſten Gliede a und der Differenz d. Z. E. Das fünfte Glied iſt nach §. 64. $= a + 4d$; folglich wird das n^{te} Glied ſeyn $a + (n - 1)\,d$. Aus dieſem folgt, daß, wenn das erſte Glied $= a$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$ gegeben, man das letzte Glied z finden kann, indem man die Differenz mit der Anzahl der Glieder weniger 1 multiplicirt, und

zu

zu dem Produkt das erſte Glied addirt: alſo iſt das letzte Glied $z = a + (n - 1) d$.

§. 66.

Iſt in einer arithmetiſchen Progreßion das erſte Glied $= a$, das letzte $= z$, und die Anzahl der Glieder $= n$ bekannt, ſo findet man daraus die Differenz $= d$, wenn man von dem letzten Gliede z das erſte a abzieht, und den Reſt durch die Anzahl der Glieder weniger $1 = n - 1$ dividirt; folglich iſt $d = \frac{z - a.}{n - 1.}$

§. 67.

Iſt das erſte Glied $= a$, das letzte $= z$, und die Differenz $= d$ gegeben, und man ſoll daraus die Anzahl der Glieder $= n$ ſuchen; ſo findet man dieſelbe, wenn man das erſte Glied abzieht; den gefundenen Reſt durch die Differenz dividirt, und zu dem Quotienten 1 addirt, folglich iſt $n = \frac{z - a}{d} + 1.$

§. 68.

Wenn aber das letzte Glied $= z$ die Differdnz $= d$ und die Anzahl der Glieder $= n$ bekannt ſind; ſo wird das erſte Glied $= a$ gefunden, wenn man die Anzahl der Glieder weniger $1 = n - 1$ mit der Differenz $= d$ multiplicirt, und von dem Produkt das letzte Glied $= z$ abzieht, folglich iſt $a = z - (n - 1) d$.

§. 69.

§. 69.

In einer jeden arithmetiſchen Progreſſion iſt die Summe der äußerſten Glieder der Summe je zweyer darzwiſchen liegenden Glieder gleich, wenn ſolche gleich weit von den äußerſten entfernt ſind.

Beweis. In der arithmetiſchen Progreßion §. 56. iſt a das erſte Glied, und $a + 4d$ das fünfte Glied und die Summe iſt $= 2a + 4d$. Nimmt man nun das zweyte Glied $= a + d$, und das vorletzte Glied $= a + 3d$, ſo iſt die Summe ebenfalls $= 2a + 4d$. Beſteht die Progreßion aus einer ungeraden Anzahl, ſo iſt die Summe der beyden äußerſten Glieder dem doppelten mittlern Gliede gleich. In eben dieſem Exempel iſt die Summe der beyden äußerſten $= 2a + 4d$, und das mittlere oder dritte Glied iſt $= a + 2d$. Nimmt man dieſes gedoppelt, ſo iſt das Produkt $= 2a + 4d$; folglich der Summe der beyden äußerſten Gliedern gleich: und dieſes war zu beweiſen.

§. 70.

Wenn man obiger Progreßion ihre Summe finden will, ſo darf man nur eben dieſe Progreßion rückwärts darunter ſchreiben, und Glied vor Glied addiren, wie folgt:

$$a + a + d + a + 2d + a + 3d + a + 4d$$
$$a + 4d + a + 3d + a + 2d + a + d + a -$$
$$\overline{2a + 4d + 2a + 4d + 2a + 4d + 2a + 4d + 2a + 4d}$$

ſo

ſo iſt dieſe gefundene und aus lauter gleichen Gliedern beſtehende Reihe zweymal ſo groß, als die Summe der Progreßion. Da nun die Anzahl der Glieder $= n$, ſo iſt die Summe $s = n.\,2a + 4d = s$. Weil nun dieſe Summe zweymal ſo groß iſt, als die Summe derarithmetiſchen Progreßion, ſo iſt diewahre Summe $= \frac{n.\,2a - 4d}{2} = s$. Weil nach §. 65. $a + (n - 1)\,d = z$; ſo muß folglich $2a + 4d = a + z$ ſeyn, und hieraus folgt denn ganz natürlich, daß $\frac{n.\,2a + 4d}{2} = n\,\frac{(a+z)}{2} = s$. ergiebt ſich die leichte Regel für die Summation einer jeglichen arithmetiſchen Progreßion.

Man multiplicire die Summe des erſten und letzten Gliede mit der Anzahl der Glieder, ſo giebt die Hälfte des Produkts die Summe der ganzen Progreßion.

Oder

man multiplicire die Summe des erſten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder.

Oder endlich

man multiplicire die halbe Summe des erſten und letzten Gliedes mit der ganzen Anzahl der Glieder.

§. 71.

Die Anwendung obiger Formeln durch einige praktiſche Aufgaben zu erläutern, iſt um ſo nöthiger, weil dadurch der Vortheil, den dieſelben leiſten, um ſo deutlicher in die Augen fällt.

Erſte Aufgabe.

Wieviel Schuh wird ein Körper in der 60ſten Secunde fallen, wenn derſelbe in der erſten Minute 16, in der zweyten 45, in der dritten 75 Schuh u. ſ. w. fällt.

Es ſey das erſte Glied $a = 15$
die Differenz $d = 30$
die Anzahl der Glieder $n = 60$
ſo iſt das letzte Glied $z = a + (n - 1) d$;
folglich $15 (60 - 1) 30 = 1785$ Schuh.

Zweyte Aufgabe.

Wie weit wird ein Körper in einer Minute, oder welches einerley iſt, in 60 Secunden fallen, wenn derſelbe in der erſten Minute 15, in der zweyten 45, in der dritten 75 Schuh u. ſ. w. fällt? Nach der vorhergehenden Aufgabe iſt das erſte Glied $a = 15.$, die Differenz $d = 30$, das letzte Glied $z = 1785$, und die Anzahl der Glieder $n = 60$. Da nun die Summe $s = \frac{n(a+z)}{2}$, ſo iſt $\frac{(15 + 1785) 60}{2}$ $= 54000$ Schuh.

Drit-

Dritte Aufgabe.

Einer kauft ein Pferd mit der Bedingung: für den erſten Hufnagel zahlt er 15 kr., für den zwenten 21 kr., für den dritten 27 kr. und immer 6 kr. mehr für jeden folgenden. In allem ſind aber 32 Nägel; wie hoch kömmt das Pferd zu ſtehen?

Da das erſte Glied $a = 15$ kr.
die Differenz $d = 6$ kr.
die Anzahl der Glieder $n = 32$ kr.
ſo iſt nach §. 65. das letzte Glied $z = a + (n - 1)\,d = 15 + (32 - 1)\,6 = 201$. Hieraus ergiebt ſich die geſuchte Summe $s = \frac{n(a+z)}{2} = \frac{32\,(15+201)}{2} = 3456$. Folglich kommt das Pferd 3456 Kreuzer oder 57 fl. 36 kr. zu ſtehen.

Vierte Aufgabe.

Ein Bauersweib verkauft Aepfel auf dem Markt an verſchiedene Käufer. Dem erſten giebt ſie 2, dem andern 5, dem dritten 8 u. ſ. w. und immer dem folgenden 3 mehr als den vorhergehenden, bis endlich der letzte 23 Aepfel bekommt. Nun fragt es ſich, wie viel ſind Käufer geweſen, und wie viel Aepfel ſie verkauft habe? Vermöge dieſe Aufgabe ſoll alſo die Anzahl der Glieder, und die Summe der Progreßion gefunden werden.

Da das erſte Glied $a = 2$
die Differenz $d = 3$
und das letzte Glied $z = 23$,

ſo iſt nach §. 67 $n = \frac{z-a}{d} + 1 = \frac{23-2}{3} + 1$ $= 8 = n$, oder die Anzahl der Käufer. Die Summe der Progreßion $s = n\ (a+z) = 8$ $\frac{(2+23)}{2} = 100 = s$.

Fünfte Aufgabe.

Eine Perſon begegnet 8 Bettlern, und giebt dem erſten 2 Kreuzer, dem andern etliche Kreuzer mehr, desgleichen den übrigen, ſo, daß er einem jeden mehr als dem andern gegeben bis auf den letzten, welcher 30 Kreuzer bekommen hat. Nun fragt ſich, wieviel der andere mehr als der erſte erhalten hat; und wieviel Kreuzer ausgegeben worden ſind?

Vermöge dieſer Aufgabe ſoll man den Unterſchied nebſt der Summe der arithmetiſchen Progreßion beſtimmen.

Nach §. 66. iſt die Differenz $d = \frac{z-a}{a-1}$.

Es ſey das erſte Glied $a = 2$
das letzte : : : $z = 30$
die Anzahl der Glieder $n = 8$;

ſo iſt $\frac{30-2}{8-1} = 4$ die Differenz

und die Summe $s = 8\ \frac{(2+30)}{2} = 128$

oder fl. 2. — 8 kr. Sechs=

Sechste Aufgabe.

Ein Brunn hat 12 Waſſerröhren, aus der andern fließen in einer Stunde 2 Eymer Waſſer mehr als aus der erſten; aus der dritten mehr als aus der zweyten u. ſ. w. ſo, daß immerfort die folgende Röhren zwey Eymer Waſſer mehr ausgießen, als die vorhergehende: aus allen Röhren aber zuſammen, fließen 180 Eymer. Nun fragt es ſich, wie viel Waſſer aus einer jeden Röhre in einer Stunde fließen könne?

Aus dieſer Aufgabe erhellet, daß man aus dem gegebenen Unterſchiede der Anzahl der Glieder und der Summe der arithmetiſchen Progreßion das erſte und letzte Glied finden ſoll.

Es ſey der Unterſchied $d = 2$
die Anzahl der Glieder $n = 12$
und die Summe $s = 180$.

Weil $s = n \frac{(a+z)}{2}$; ſo darf man nur $s = 180$ durch $\frac{n}{2}$; ſo giebt der Quotient die Summe von $a + z = 30$ an. Weil die Summe der beyden äußerſten Glieder das erſte Glied zweymal nebſt dem Unterſchiede multiplicirt mit der Anzahl der Glieder weniger eins enthält; ſo multiplicire man die Differenz $d = 2$ durch die Anzahl der Glieder $n = 12$ weniger 1: al-

ſo $n-1=11$, und das Produkt 22 ziehe man von der gefundenen Summe $a+z=30$ ab, ſo bleibt 8 das erſte Glied zweymal genommen übrig. Halbirt man dieſe 8, ſo iſt der Quotient $4=$ dem erſten Gliede a. Da nun das erſte Glied $a=4$, ſo läßt ſich nach §. 65. das letzte z finden, indem $z=a+(n-1)\,d$, folglich $z=4\ (12-1)\ 2=26$.

§. 72.

Das geometriſche Verhältniß zwiſchen zwey gegebenen Größen giebt die Antwort auf die Frage: um wievielmal die eine Größe größer ſey als die andere Größe, an; und wird gefunden, wenn man die eine durch die andere dividirt.

§. 73.

Bey einem geometriſchen Verhältniß kommen drey Stücke zu betrachten vor. Erſtens: die erſte der beyden gegebenen Größen, welche der Vorderſatz heißt; zweytens: die andere derſelben, welcher der Nachſatz heißt, und drittens: die Benennung des Verhältniſſes, welche man durch die Diviſion des Vorderſatzes in den Nachſatz findet.

§. 74.

Sind zwey geometriſche Verhältniſſe einander gleich, ſo wird die Gleichheit derſelben eine geome=

geometriſche Proportion genannt. Man ſchreibt dergleichen geometriſche Proportion $a:b=c:d$, und wird ausgeſprochen; wie ſich verhält a zu b, ſo verhält ſich auch c zu d.

§. 75.

Eine geometriſche Proportion hat vier Glieder, welche die Eigenſchaft haben müſſen, daß, wenn man das erſte durch das zweyte dividirt, es eben ſoviel iſt, als ob man das dritte durch das vierte dividirt.

§. 76.

Hieraus folgt dieſe Haupteigenſchaft, daß das Produkt aus dem erſten und vierten Glied eben ſo groß iſt, als das Produkt aus dem zweyten und dritten; oder daß das Produkt der beyden äußern Glieder gleich iſt dem Produkt der beyden mittleren Gliedern. Z. Ex. Es ſey die geometriſche Proportion $a:b=c:d$, ſo iſt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Multiplicirt man jeden dieſer Brüche mit b, ſo bekommt man $a=\frac{bc}{d}$. Multiplicirt man ferner beyderſeits mit d, ſo bekommt $ad=bc$. Nun iſt aber ad das Produkt der äußern Glieder, und bc das Produkt der mittleren Glieder, welche beyde Produkt folglich einander gleich ſind.

§. 77.

Weil in einer geometriſchen Proportion das Produkt der äußern Glieder dem Produkt der mittleren Glieder gleich iſt, ſo kann man daraus leicht das vierte Glied finden, wenn die drey erſten Glieder gegeben ſind. Z. E. Es ſeyen die drey erſten Glieder a, b und c bekannt, $a:b = c$, und für das vierte unbekannte Glied ſetze man d. Da nun $ad = bc$ ſeyn muß, ſo dividire man beyderſeits durch a, ſo bekommt man $d = \frac{bc}{a}$; folglich iſt das vierte Glied $= \frac{bc}{a}$, welches herauskommt, wenn man das zweyte Glied mit dem dritten multiplicirt, und das herausgekommene Produkt durch das erſte dividirt.

§. 78.

Die Glieder einer jeglichen geometriſchen Proportion können auf verſchiedene Art verſetzt werden, ohne die Proportion dadurch aufzuheben.

Beweis. Die Proportion bleibt, ſo lange das Produkt der äußeren Glieder dem Produkte der mittleren Glieder gleich bleibt: folglich

$a:b=c:d.$	$ad=bc.$
$a:c=b:d.$	$ad=bc.$
$b:a=d:c.$	$ad=bc.$
$b:d=a:c.$	$ad=bc.$
$c:a=d:b.$	$ad=bc.$
$c:d=a:b.$	$ad=bc.$
$d:b=c:a.$	$ad=bc.$
$a+b:b=c+d:d.$	$ad=bc.$
$a:a+b=c:c+d.$	$ad=bc.$
$a-b:b=c-d:d.$	$ad=bc.$
$a:a-a=c:c-d.$	$ad=bc.$

Denn es iſt immer das Produkt der äußern dem Produkte der mittlern gleich.

§. 79.

Wenn man die Glieder einer geometriſchen Proportion der Ordnung nach durch die Glieder einer andern Proportion multiplicirt, ſo bleibt immer unter den Produkten eine Proportion.

Beweis. Es ſeyen die zwey Proportionen:

$$a:aq=b:bq$$
$$c:cp=d:dp$$

Multiplicirt man die Glieder der erſten Proportion mit den Gliedern der andern Proportion, ſo entſteht:

$$ac:acpq=db:dbpq$$

welches ebenfalls eine geometriſche Proportion iſt, weil beyderſeits der nämliche Quotient, nämlich pq iſt.

Der Beweis für die Diviſion iſt der nämliche:

$$\text{Es ſey} \left\{ \begin{array}{l} ac:acpq = bd:bdpq \\ c:\ cp = d:dp \end{array} \right.$$

Dividirt man die Glieder der erſten Proportion durch die Glieder der zweyten Proportion, ſo entſteht: $a:aq = b:bq$.

Hieraus folgt, daß gleiche Potenzen, wie auch gleiche Wurzeln ſolcher Größen, die eine Proportion ausmachen, gleichfalls proportional ſind.

§. 80.

Wenn mehrere gleiche Verhältniſſe ſind, ſo wird die Summe aller Vorderſätze zur Summe aller Nachſätze ſich verhalten, wie was immer für ein Vorderſatz zu ſeinem Nachſatz.

Beweis. Die gleichen Verhältniſſe ſind: $a:aq$, und $b:bq$; imgleichen $c:cq$ und $d:dq$.

Die Summe alle Vorderſätze iſt $a+b+c+d$,
die Summe aller Nachſätze $\overline{a+b+c+d}\times q$.
Nun aber verhalten ſich dieſe zwey Summen gegen einander, wie $a:aq$, weil beyderſeits der nämliche Quotient q ſtatt findet.

§. 81.

§. 81.

Es ſind drey Glieder einer geometriſchen Proportion gegeben, wie findet man das vierte Glied?

Aufloſung.

Geht eines der äußern Glieder ab, ſo multiplicire man die beyden mittlere, das Produkt dividire man durch das gegebene äußere, ſo giebt der Quotient das geſuchte äußere Glied.

Iſt aber eines von den mittleren Gliedern zu ſuchen, ſo multiplicire man die beyden äußern Glieder, dividire das herausgekommene Produkt durch das gegebene mittlere Glied, ſo iſt der Quotient das geſuchte mittlrre Glied.

Zum Exempel.

Es ſey a das erſte Glied,
b das zweyte, und
c das dritte Glied;
ſo iſt im erſten Fall die Proportion

$$a : b = c : \frac{bc}{a}$$

Es ſey a das erſte Glied,
c das dritte, und
d das vierte Glied;
ſo iſt im zweyten Fall die Proportion

$$a : \frac{ad}{c} = c : d$$

§. 82.

Es ſind zwey Glieder einer ſtäten geometriſchen Proportion gegeben, wie findet man das dritte?

Aufloͤſung.

1) Soll das mittlere Glied geſucht werden, ſo multiplicire man die beyden äußern Glieder, und aus dem Produkt ziehe man die Quadratwurzel, ſo iſt alsdenn ſolche das verlangte Glied.

2) Soll aber eines von den äußern Gliedern geſucht werden, ſo verwandle man das mittlere Glied in ein Quadrat; und dividire alsdenn ſolches durch das gegebene äußere Glied, ſo giebt der Quotient das verlangte äußere Glied.

Zum Exempel.

Es iſt im erſten Fall a das erſte, und
c das dritte Glied;
ſo iſt die Proportion $a : \sqrt{ac} = \sqrt{ac} : c$.

Es

Es ſey im zweyten Fall a das erſte, und
b das mittlere Glied

ſo iſt die Proportion $a : b = b : \frac{b^2}{a}$.

§. 83.

Eine Reihe Größen, welche immer um gleich viel wächst oder abnimmt, heißt eine geometriſche Progreßion. Diejenige Größe, welche angiebt, um wie vielmal ein jedes Glied größer iſt als das vorhergehende Glied, wird der Nenner genennt.

Eine jede geometriſche Progreßion kann auf folgende Art ausgedrückt werden:

$a.\ aq.\ aq^2.\ aq^3.\ aq^4.\ aq^5$ u. ſ. w.

§. 84.

Ein jedes Glied einer geometriſchen Progreßion iſt gleich dem Produkt aus dem erſten Gliede, und aus den Exponenten zu jener Potenz erhoben, welche die Zahl der vorhergehenden Glieder anzeigt.

Beweis. Der Exponent fängt an ein Faktor zu ſeyn im zweyten Gliede, und er ſteigt in jedem Gliede um einen Grad.

Hieraus folgt: die Potenzen von einer jeglichen Größe machen eine geometriſche Progreßion.

greßion aus. Denn ſetzt man $a = 1$; ſo erhält man in der allgemeinen Formel:

$$1.\ q.\ q^2.\ q^3.\ q^4.\ q^5.\ \text{u. ſ. w.}$$

Ganz anders aber verhält ſich die Sache bey den Wurzeln einer Größe.

§. 85.

In allen geometriſchen Progreßionen iſt das Produkt der zwey äußerſten Glieder gleich dem Produkt aus was immer für zweyen andern Gliedern, die von dem äußerſten gleich weit abſtehen.

Der Beweis hievon iſt klar, wenn man nur die allgemeine Formel $a.\ aq.\ aq^2.\ aq^3.\ aq^4.\ aq^5.\ aq^6.$ u. ſ. w. betrachtet; denn das Produkt der äußern Glieder $a \times aq^6 = a^2q^6$ das Produkt des zweyten und vorletzten Gliedes iſt $aq \times aq^5 = a^2q^6$ u. ſ. w.

§. 86.

In einer jeden geometriſchen Progreßion verhält ſich das erſte Glied zum dritten, wie das Quadrat des erſten zum Quadrat des zweyten: das erſte zum vierten, wie der Cubus des erſten zum Cubus des zweyten u. ſ. w.

Der

Der Beweis liegt in der allgemeinen Formel. Den $a : aq^2 = a^2 : a^2 q^2$. Eben ſo auch $a : aq^3 = a^3 q^3$.

§. 78.

In einer jeden geometriſchen Progreßion verhält ßch die Summe aller Glieder, das letzte ausgenommen, zur Summe aller Glieder, das erſte ausgenommen, wie das erſte zum zweyten.

Beweis. Die Summe aller Vorderſätze verhält ſich zu der Summe aller Nachſätze, wie ein jeder Vorderſatz zu ſeinem Nachſatz. §. 80. Es ſind aber in einer geometriſchen Proportion alle Glieder ein Vorderſatz, das letzte ausgenommen, folglich ſind auch alle ein Nachſatz, das erſte ausgenommen. Mithin verhält ſich die Summe aller Glieder, das letzte ausgenommen, zur Summe aller Glieder, das erſte ausgenommen, wie das erſte Glied zum zweyten Gliede.

Anmerkung.

Es ließen ſich, wie bey der arithmetiſchen Progreßion, ſehr viele Formeln zu Auflöſung der Aufgaben einer geometriſchen Progreßion berechnen. Da aber die Berechnung eines Theils ſehr ſchwer iſt, und andern Theils nicht ſo häufig vorkommt, ſo iſt es genug, wenn man folgende aus den vorgenannten Grund-

Grundſätzen fließende und öfters vorkommende Aufgaben ſich merkt.

§. 88.

Das erſte Glied, der Quotient und die Anzahl der Glieder einer geometriſchen Progreßion ſind gegeben, wie findet man das vierte?

Auflöſung.

Es ſey das erſte Glied $= a$
das letzte : : : $= z$
der Quotient $= q$
die Anzahl der Glieder $= n$;
ſo folgt aus den vorhergehenden Grundſätzen folgende Formel:

$$z = a q^{n-1}.$$

das heißt, um das letzte Glied zu bekommen, erhebe man den Quotienten zu jener Potenz, welche die Anzahl der Glieder weniger 1 anzeigt, und mit dieſer Potenz multiplicire man das erſte Glied. Will man aber, wenn n eine ſehr große Zahl iſt, und die Erhebung zu einer ſehr hohen Potenz ſehr beſchwerlich iſt, die Rechnung abkürzen, ſo merke man ſich folgendes: Soll eine Größe zu einer Potenz erhoben werden, ſo theile man den Exponenten dieſer Potenz in zwey, drey und mehrere Theile, und erhebe die gegebene Größe zu den durch dieſe Theile angezeigten Potenzen, und multi-

multiplicire dieſe durch einander, ſo iſt das Produkt die verlangte Potenz.

Zum Exempel.

Soll eine Größe zur ſiebenten Potenz erhoben werden: ſo erhebe man ſie zur dritten und vierten Potenz, und multiplicire ſolche durch einander, ſo iſt das Produkt die ſiebente Potenz.

Exempel.

Geſezt, ein Körnlein Getreid trage in einem Jahre nur fünf Körnlein: ſäet man dieſe fünfe wieder aus, ſo bringt ein jedes derſelben wieder fünf Körnlein, und ſo fort bis in das vierzigſte. Wieviel Körnlein werden im vierzigſten Jahre wachſen?

Auflöſung.

Es ſey $a = 5$, $q = 5$ und $n = 40$; ſo iſt $n - 1 = 39$. Um alſo den Werth von z zu finden, muß man zu Folge der Formel $z = aq^{n-1}$ die Zahl 5 zu der neun und dreyßigſten Potenz erheben, und alsdenn durch das erſte Glied multipliciren. Man nehme Anfangs 5 bis zur dritten Potenz; ſo iſt dieſelbe $= 125$. Dieſe durch ſich ſelbſt multiplicirt giebt die ſechste Potenz $= 13625$. Dieſe wieder durch ſich ſelbſt multiplicirt, giebt die zwölfte Po-

tenz 244140625. Multiplicirt man dieſe wieder durch ſich ſelbſt, ſo giebt 59604644775390625 die vier und zwanzigſte Potenz. Multiplicirt man dieſe wieder mit der zwölften Potenz, ſo bekommt man 14551915228366851806640625 für die ſechs und dreyßigſte Potenz. Dieſe wieder mit der dritten multiplicirt, giebt für die neun und dreyßigſte Potenz 1818989403545856475830078125. Endlich dieſe wieder durch das erſte Glied 5 multiplicirt, giebt 909494701772928237915039002 die verlangte Anzahl der Körner, welche im vierzigſten Jahre wachſen.

§. 89.

Das erſte und letzte Glied einer geometriſchen Progreßion nebſt dem Quotienten ſind gegeben, man ſoll die Summe der ganzen Progreßion ſuchen.

Auflöſung.

Man multiplicire das letzte Glied durch den Quotienten, von dem Produkt ziehe man das erſte Glied ab, den Reſt dividire man durch den Quotienten weniger 1, ſo iſt der herausgekommene Quotient die Summe der ganzen Progreßion. Es ſey die Summe $= s$; ſo iſt alſo $s = \frac{zaq - a^2}{aq - a} = \frac{zq - a}{q - 1}$.

Zum

Zum Exempel.

Wieviel Getreid wächst in vierzig Jahren, wenn im erſten Jahre aus einem Körnlein 5 wachſen, dieſe wieder geſäet werden, und aus jedem wieder fünfe entſpringen, u. ſ. w.

Man ſuche nach dem vorhergehenden §. das letzte Glied, ſo findet man, daß daſſelbe hält, $9094947017729282379150390625 = z$, $a = 5$ und $q = 5$.

Wenn man nun das letzte Glied z mit q, das iſt, durch 5 multiplicirt, ſo entſteht $zq = 45474735088646411895751953125$; und zieht man $a = 5$ davon ab, ſo entſteht $zq - a = 45474735088646411895751953120$. Wenn man dieſes endlich durch $q - 1$, das iſt, durch 4 dividirt, ſo entſteht

$$\frac{zq - a}{q - 1} = 11368683772161602973937988280.$$

Sechster Abſchnitt.

Von den algebraiſchen Gleichungen vom erſten Grad mit einer unbekannten Größe.

§. 90.

Es ſind zween Wege zu der Wahrheit zu gelangen: die Zuſammenſetzung (Syntheſis) und die Auflöſung (Analyſis). Jene fängt von dem einfachſten an, und ſchwingt ſich nach und nach, und gleichſam ſtuffenweiſe zu dem, was man zu wiſſen verlangt: dieſe nimmt jenes, was geſucht wird, als ſchon gefunden an: erforſcht alsdenn alle Folgen, die aus dieſer Vorausſetzung fließen, und zieht endlich aus eben dieſen Folgen die geſuchte Wahrheit heraus. Dieſer zweyten Art, die Wahrheit zu entdecken, bedient man ſich in Auflöſung der algebraiſchen Aufgaben. Es müſſen aber in allen Aufgaben einige Dinge bekannt, und wenigſt ein Ding unbekannt ſeyn; denn, wenn alles bekannt wäre, ſo würde nichts mehr übrig ſeyn, nach dem man fragen könnte: wenn aber gar nichts bekannt wäre, würde die Frage unmöglich aufzulöſen ſeyn.

Zu Auflöſung der algebraiſchen Aufgaben bedient man ſich der Gleichungen. Wie dieſelbe aufzulöſen ſind, ſoll in folgenden §§. erklärt werden.

§. 91.

Eine Gleichung iſt eine Vergleichung von zweyen algebraiſchen Ausdrücken, davon einer ſoviel gilt, als der andere. Sie werden miteinander durch das Zeichen = verbunden. Jene Größen, welche zur Linken dieſes Gleichheits-Zeichen ſtehen, machen, alle zuſammengenommen, das erſte Glied der Gleichung: die, welche zur Rechten dieſes Gleichheits-Zeichens ſtehen, machen das zweyte Glied der Gleichung aus: zum Exempel, in der Gl ichung $3x + 3b = 3c - 5d + 2a$, die zwo erſten Größen, $3x + 3b$ machen das erſte: die drey letzten $3c - 5d + 2a$ das zweyte Glied aus.

§. 92.

Jene Gleichung, in welcher nur eine unbekannte Größe iſt, heißt eine beſtimmte Gleichung. Wenn aber mehrere unbekannte Größen darinn vorkommen, nennt man ſie eine unbeſtimmte Gleichung. Die Urſache dieſer Benennung iſt, weil jene nur eine, oder wenigſt nur eine beſtimmte Anzahl der Auflöſungen hat, dieſe aber unendlich vielerley.

§. 93.

Jede Gleichung iſt von jenem Grade, welchen der größte Exponent der unbekannten Größe anzeigt: alſo iſt die Gleichung $3x + a^2 = 2b - x$ vom erſten; die Gleichung $x^2 + ax = c$ vom zweyten Grade.

§. 94.

Eine Gleichung auflöſen heißt ſoviel, als den Werth derjenigen unbekannten Größe, die darinn vorkömmt, finden. Dieſes erhält man, wenn die Gleichung alſo geordnet wird, daß die unbekannte Größe ganz allein auf der einen Seite des Zeichens =, auf der andern aber lauter bekannte Größen ſtehen.

Wie man nun dieſes erhalten könne erſtens, wenn die Gleichung vom erſten Grade iſt, und nur eine unbekannte Größe hat: zweytens, wenn ſie vom zweyten Grade iſt, aber wieder nur eine unbekannte Größe hat: und drittens, wenn mehrere unbekannte Größen darinn begriffen ſind; wird in nachfolgenden Paragraphen gezeigt.

§. 95.

Ehe man noch die Regeln zu dieſer Auflöſung giebt, muß man jene Grundſätze anführen, auf welche ſich alle dieſe Regeln gründen.

I. Wenn man zu gleichen Größen etwas gleiches addirt, ſo werden die Summen gleich ſeyn.

II. Wenn man von gleichen Größen etwas gleiches ſubtrahirt, ſo ſind die Reſte gleich.

III. Wenn man gleiche Größen durch gleiche Größen multiplicirt, ſo entſtehen gleiche Produkte.

IV. Wenn man gleiche Größen durch gleiche Größen dividirt, ſo bekömmt man gleiche Quotienten.

V. Wenn gleiche Größen zu den nämlichen Potenzen erhöhet werden, ſo ſind dieſe Potenzen gleich.

VI. Wenn aus gleichen Größen die nämliche Wurzel ausgezogen wird, ſo ſind dieſe Wurzeln wieder gleich.

Alle dieſe Grundſätze kann man in einen zuſammenziehen, und ſagen: Wenn bey gleichen Größen die nämlichen Bearbeitungen vorgenommen werden, ſo entſtehen wieder gleiche Größen, Hier folgen nun die Regeln.

Erſte Regel.

§. 96.

Jeder Theil einer Gleichung kann aus einem Gliede in das andere mit Veränderung des Zeichens übertragen werden, ohne daß hiedurch die Gleichheit beyder Glieder gehoben wird.

Alſo wenn $x - a = b$, ſo ſagt man, es ſey auch $x = a + b$. Denn $x - a + a = b + a$ gemäß dem erſten Grundſatze: weil nun $- a$ und $+ a$ einander aufheben, ſo folgt, daß $x = a + b$. Eben ſo, wenn $x + a = b$, ſagt man, es ſey auch $x = b - a$; denn $x + a - a = b - a$

$= b - a$ gemäß dem zweyten Grundſatze. Alſo iſt auch nach der Abkürzung $x = b - a$.

Durch Hülfe dieſer Regel kann man alle Theile einer Gleichung, in welchen die unbekannte Größe enthalten iſt, auf eine Seite des Zeichens $=$, und auf die andere, alle, welche gänzlich bekannt ſind, ſetzen.

Zum Exempel.

I.

Es ſey $3x + 2a - 3b = 2x + 3b - 5b$
es wird ſeyn $3x - 2x = 3b - 5c - 2a + 3b$
und folglich $x = 6b - 5c - 2a$.

II.

$2x - 3ab - 5ac = x - 3ab - 4ac$
$2x - x = - 3ab - 4ac + 3ab + 5ac$
folglich $x = ac$.

III.

$3x - 9 = 2x + 6 - 14$
$3x - 2x = 6 - 14 + 9$
folglich $x = 1$.

§. 97.

Aus dieſer Regel folgt, man könne in jeder Gleichung die Zeichen aller Theile verändern; denn, wenn man alle Theile aus einem Gliede in das andere überſetzen wollte, würden

den ja alle Zeichen verändert werden. Dieſes hat öfters ſeinen Nutzen, wenn nämlich die unbekannte Größe ganz allein auf einer Seite mit dem Zeichen — ſteht. Alſo, wenn man hat $3x - a = 3x + b$, ſo bekommt man $3x - 4x = b + a$, oder $-x = b + a$. Wenn man nun alle Zeichen verändert, ſo entſteht $x = -a - b$.

§. 98.

Zweyte Regel.

Wenn ein Theil einer Gleichung durch was immer für eine Größe multiplicirt iſt, ſo können alle übrigen Theile durch dieſe Größe dividirt, und dieſelbe in jenem Theile, wo ſie ein Factor war, weggelaſſen werden.

Alſo wenn $ax = b + c$, ſo ſage man, es ſey $x = \frac{b+c}{a}$. Denn $\frac{ax}{a} = \frac{b+c}{a}$ gemäß dem vierten Grundſatze, und folglich $x = \frac{b+c}{a}$.

Durch Hülfe dieſer Regel kann man die unbekannte Größe von was immer für einen Coeficienten erledigen.

Zum Exempel.

I.

Es ſey $3x - 5 = 3 - 2x$
es wird ſeyn $3x + 2x = 3 + 5$
das iſt $5x = 8$
folglich $x = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$.

II.

Es ſey $2bcx - ab = 5bc + 2bcd$
es wird ſeyn $2bcx = 5bc + 2bcd + ab$
das iſt $x = \frac{5bc + 2bcd + ab}{2bc}$

III.

Es ſey $ax - ab = 3ad$
es wird ſeyn $ax = 3ad + ab$
folglich $x = \frac{3ad + ab}{a} = 3d + b$.

§. 99.

Wenn die unbekannte Größe mit verſchiedenen bekannten Größen multiplicirt, ſich in mehreren Theilen befindet, ſo muß man durch die Summe aller dieſer Factoren beyde Glieder der Gleichung dividiren. Im erſten Gliede wird alsdenn die unbekannte Größe allein der Quotient ſeyn: das andere Glied wird ein Bruch ſeyn, deſſen Nenner die Summe aller dieſer Factoren iſt. Läßt ſich alsdenn der Zähler

ler durch dieſen Nenner genau dividiren, ſo wird dieſe Diviſion wirklich vorgenommen: geht aber dieſes nicht an, ſo werden anſtatt der Buchſtaben ihre Werthe geſetzt, und alsdenn erſt mit den Zahlen die Diviſion vorgenommen.

Zum Exempel.

I.

Es ſey $5acx - 3bc = 2bcx - 3cd$
es wird ſeyn $5acx - 2bcx = 3bc - 3cd$
folglich $x = \frac{3bc - 3cd}{5ac - 2bc} = \frac{3b - 2d}{5a - 2b}$.

II.

Es ſey $3ac - 3cx = 5ab - 3bx$
es wird ſeyn $5bx - 3cx = 5ab - 3ac$
folglich $x = \frac{5ab - 3ac}{5b - 3c} = a$

III.

$$2bx + 8b^2 - 6ab + 9ad = 3dx + 12bd$$
$$2bx - 3dx = 12bd - 8b^2 + 6ab - 9ad$$
$$x = \frac{12bd - 8b^2 + 6ab - 9ad}{2b - 3d} = 3a - 4b$$

Anmerkung.

Wenn in einer Gleichung die unbekannte Größe in mehreren Theilen vorkommt, und in einem derſelben keinen Coeficienten bey ſich hat, ſo iſt die Einheit ihr Coeficient, welcher

dann

dann in der Diviſion nicht außer Acht gelaſſen werden muß.

Zum Exempel.

$$x + a x = b c$$

$$x = \frac{b c}{1 + a}$$

100.

Dritte Regel.

Wenn ein Theil einer Gleichung durch was immer für eine Größe dividirt iſt, ſo können die übrigen Theile durch ſelbe Größe multiplicirt, und alsdenn dieſer Diviſor, wo er zuvor war, weggelaſſen werden.

Alſo wenn $\frac{x}{b} = a$, ſo ſage man, es ſey $x = ab$,

Denn $\frac{bx}{b} = ab$ gemäß dem dritten Grundſatze.

Alſo iſt $x = ab$.

Durch Hülfe dieſer Regel kann man die unbekannte Größe von allen Diviſoren befreyen, und alſo die Brüche, in denen die unbekannte Größe iſt, aufheben. Die Brüche, welche aus lauter bekannten Größen beſtehen, iſt nicht nöthig aufzuheben: jedoch pflegt man ſie öfters auf gleiche Art wegzuſchaffen, damit zuletzt der Werth der unbekannten Größe in einem einzigen Bruche erhalten werde; da man doch ſonſt

für

für dieſen Werth mehrere Brüche mit verſchiedenen Nennern erhalten würde.

Zum Exempel.

Es ſey $\frac{x}{3} - 9 = 15$

es wird ſeyn $x - 27 = 45$ gemäß der dritten Regel.

$x = 45 + 27 = 72$ gemäß der erſten Regel.

§. 101.

Wenn in einer Gleichung mehrere Brüche vorkommen, kann man auf gleiche Art einen nach dem andern aufheben. Man ſehe das folgende Exempel:

Es ſey $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 7 - \frac{x}{2}$ Wenn man alles multiplicirt durch 3,

so entſteht

$x + \frac{3x}{5} = 21 - \frac{3x}{2}$ Wenn man alles multiplicirt durch 5.

$5x + 3x = 105 - \frac{15x}{2}$ Wenn man alles multiplicirt durch 2.

$10x + 6x = 210 - 15x$

$10x + 6x + 15 = 210$

$31x = 210$

$x = \frac{210}{31} = 6\,\frac{24}{31}$

Es

Es ſey $\frac{x}{2a} + \frac{3x}{b} = c + \frac{dx}{5f}$

$$x + \frac{6ax}{b} = 2ac + \frac{2adx}{5f}$$

$$bx + 6ax = 2abc + \frac{2abdx}{5f}$$

$$5bfx + 30afx = 10abcf + 2abdx$$

$$5bfx + 30afx - 2abdx = 10abcf$$

$$x = \frac{10abcf}{5bf + 30af - 2abd.}$$

§. 102.

Man kann auch alle Brüche auf einmal wegſchaffen, wenn man alle Theile der Gleichung durch das Produkt aller Nenner der Brüche multiplicirt: wobey doch dieſes zu beobachten, daß man jeden Zähler der Brüche nur mit dem Produkte aller übrigen Nenner multipliciren muß, nicht aber mit dem eigenen; denn, wenn man alsdenn denn eigenen Nenner wegläßt, ſo hat man eben darum ſelben Bruch auch durch ſeinen Ntnner multiplicirt.

Zum Exempel.

I.

$$\frac{2x}{7} - \frac{6}{5} = \frac{3}{4} + \frac{5x}{6}$$

$$2x \times 5 \times 4 \times 6 - 6 \times 74 \times 6 = 3 \times 7 \times 5 \times 6 + 5x \times 7 \times 5 \times 4$$

$$240x - 1008 = 630 + 700x$$

$$240x - 700x = 630 + 1008$$

$$-460x = 1638$$

$$460x = -1638$$

$$x = -\frac{1638}{460} = -\frac{819}{230}$$

II.

Es ſey $\frac{5ab}{3c} - \frac{5x}{2b} = \frac{3ac}{4} - \frac{ax}{c}$

$$5ab \times 2b \times 4 \times c - 5x \times 3c \times 4 \times c = 3ac \times 3c \times 2b \times c \times 2x \times 3c \times 2b \times 4$$

$$40ab^2c - 60c^2x = 18ac^3b - 24abcx$$

$$24abcx - 60c^2x = 18ac^3b - 40ab^2c$$

$$x = \frac{18ac^3b - 40ab^2c}{24abc - 60c^2} = \frac{9ac^2b - 20ab^2}{12ab - 30c}$$

§. 103.

Alle Regeln, welche zur Aufloͤſung der Gleichungen vom erſten Grade mit einer unbekannten Groͤße gehoͤren, kurz zuſammen gezogen, ſind ſolgende. Erſtens: wenn in der gegebenen Gleichung Bruͤche vorkommen, ſo hebt man dieſe Bruͤche auf, indem man die ganze Gleichung durch die Nenner der Bruͤche multiplicirt.

cirt. Zweytens: verſetzt man die Theile der Gleichung mit Veränderung des Zeichen derer, welche verſetzt werden, alſo, daß alle Theile, welche die unbekannte Größe in ſich haben, auf der einen Seite, auf der andern alle gänzlich bekannte zu ſtehen kommen. Drittens, befreye man die unbekannte Größe von ihren Coeficienten oder Factoren, indem man die ganze Gleichung durch die Summe derſelben dividirt.

Exempel zur Uebung.

1) Man ſoll die Zahl 7 in zwey Theile theilen, wovon der größere um drey größer ſey, als der kleinere?

Auflöſung.

Vermöge dieſer Aufgabe iſt der größere Theil unbekannt, man nenne dahero ſolchen x, ſo iſt der kleinere Theil $7 - x$. Dahero muß ſeyn $x = 7 - x + 3$.

Oder:

$$x = 10 - x,$$

addirt man das x, ſo kommt $2x = 10$; und dividirt man mit 2, ſo wird $x = 5$. Folglich iſt der größere Theil 5. und der kleinere 2.

2) Es

2) Es ſollen 1600 fl. unter drey Perſonen dergeſtalt vertheilt werden, daß der erſte 200 fl. mehr haben ſoll als der zweyte; der zweyte 100 fl. mehr als der dritte: wieviel bekommt ein jeder?

Auflöſung.

Nennt man der erſten Antheil $= x$, ſo iſt des zweyten $= x + 100$, und des dritten $= x + 300$. und die Summe von dieſen dreyen Theilen zuſammen $= 1600$ fl. Dahero $3x + 400 + 1600$. nun ſubtrahire man 400, ſo wird $3x = 1200$. dividirt man mit 3, ſo iſt $x = 400$. folglich bekommt der dritte 400 fl. der zweyte 500 fl. und der erſte 700 fl.

3) 8600 fl. ſoll unter 4 Perſonen dergeſtalt vertheilt werden, daß die erſte Perſon zweymal ſoviel bekommt als die zweyte weniger 100 fl. — die zweyte dreymal ſoviel als die dritte weniger 200 fl., und die dritte ſoll haben viermal ſoviel als die vierte weniger 300 fl. Was trifft eine jede Perſon?

Auflöſung.

Wenn vermöge der Aufgabe der vierten Perſon ihr Antheil $= x$ geſetzt wird, ſo trifft die dritte Perſon $4x - 300$, die zweyte $12x - 1100$. und die erſte $24x - 2300$

 und

und die Summe davon muß 8600 betragen; dahero entſteht die Gleichung.

$41x - 3700 = 8600$. addirt man 3700, ſo komt $41x = 8600 + 3700 = 12300$. dividirt man mit 41. ſo giebt $x = 300$. folglich iſt der

vierten Perſon Antheil	$= 300$.
der dritten : : :	$= 900$.
der zweyten : : :	$= 2500$. und
der erſten : : : :	$= 4900$.
Summa	8600 fl. —.

4) Ein Goldſchmid hat zwey ſilberne Becher nebſt einen Deckel verfertiget. Der erſte Becher wiegt 12 Loth, legt man den Deckel darauf, ſo wiegt er zweymal ſoviel als der andere Becher; legt man aber den Deckel auf den andern Becher, ſo wiegt er dreymal ſoviel als der erſte Becher. Wie ſchwer iſt nun der Deckel, und auch der andere Becher geweſen?

Auflöſung.

Man ſetze der Deckel habe gewogen x Lt. ſo iſt die Schwere des erſten Bechers ſammt dem Deckel $x + 12$ Loth. Da nun dieſes Gewicht zweymal ſo ſchwer iſt als der andere Becher, ſo hat der andere Becher gewogen $\frac{1}{2}x + 6$. Legt man nun den Deckel darauf, ſo wiegt derſelbe $\frac{3}{2}x + 6$, welches 3mal 12, das iſt, 36 gleich ſeyn muß.

Folg-

Folglich hat man $\frac{3}{2}x + 6 = 36$ oder 6 ſubtrah.
$\frac{3}{2}x = 30$. oder $\frac{1}{2}x = 10$ und
$x = 20$. gleich der Schwere des Deckels, und der andere Becher hat gewogen 16 Loth.

Probe.

Schwere des erſten Bechers		= 12 Loth
des Deckels	: : :	= 20 Loth
Summa	: : : :	32 Loth.

welche zweymal ſo ſchwer iſt als der andere Becher.

Schwere des audern Bechers		= 16 Loth
des Deckels	: : :	= 20 Loth
Summa	: : : :	= 36 Loth.

welche dreymal ſchwerer iſt als der erſte Becher.

Siebenter Abſchnitt.

Von den algebraiſchen Gleichungen vom zweyten Grade mit einer unbekannten Größe.

§. 104.

Die Gleichungen vom zweyten Grade ſind ſolche, in welchen die größte Potenz der unbekannten Größe einen Coeficienten oder einen Diviſor bey ſich hat, das iſt, wenn es durch eine bekannte Größe multiplicirt oder dividirt wird; ſo muß man erſtens, dieſe bekannte Größe wegſchaffen, den Coeficienten zwar durch die Diviſion (§. 98.) den Diviſor aber durch die Multiplication (§. 100.).

Zweytens. Bringe man alle Theile, welche die unbekannte Größe in ſich haben, auf die eine, die gänzlich unbekannte aber auf die andere Seite (§. 88.).

Drittens. Wenn alsdenn das Quadrat der unbekannten Größe das Zeichen — vor ſich hat, ſo verändere man alle Zeichen der Gleichung.

Viertens. Wenn das ganze Glied der Gleichung ein vollkommenes Quadrat iſt, (welches

(welches alsdenn geſchieht, wenn das erſte Glied aus einem einzigen Theile, nämlich aus x^2 beſteht); ſo ziehe man aus ſelbem die Quadratwurzel. Eben dieſe Wurzel ziehe man auch aus dem zweyten Gliede der Gleichung, wenn es ſich anders thun läßt. Geht aber dieſe Ausziehung der Wurzel bey dem zweyten Gliede nicht an; ſo ſetze man das Zeichen $\surd$ vor daſſelbe.

Fünftens. Hat aber das erſte Glied der Gleichung neben dem x^2 noch einen andern Theil, welcher aus der unbekannten Größe, mit einer bekannten Größe multiplicirt, oder dividirt, beſteht; ſo nehme man die Hälfte dieſes Coeficienten oder Factors: erhebe man dieſe Hälfte zum Quadrat: ſetze man dieſes Quadrat zu jedem Gliede der Gleichung. Solcher Geſtalt wird das erſte Glied der Gleichung jederzeit ein vollkommenes Quadrat werden, wie leicht erhellet aus jenem Lehrſatze: das Quadrat einer zweygliedichten Größe begreift in ſich das Quadrat des erſten Theils, das Produkt des zweyten Theils, und das doppelte Produkt des erſten durch den zweyten.

Siebentens. Wenn nun das erſte Glied zu einem vollkommenen Quadrate geworden, ſo ziehe man aus beyden Gliedern der Gleichung die Quadratwurzel, oder wenn dieſes bey dem zweyten Gliede ſich nicht thun läßt,

ſo ſeße man das Zeichen $\surd$ davor. Die Quadratwurzel des erſten Glied iſt allezeit x und der halbe Coeficient, mit welchem das x in der Gleichung multiplicirt iſt, und zwar mit eben ſeinem Zeichen.

Siebentens. Brauche man nochmals die Verſeßung; indem man den in der Ausziehung der Wurzel erhaltenen bekannten Theil auf die andere Seite ſeßt, mit Veränderung ſeines Zeichen.

§. 105.

Hiebey iſt noch zu merken, daß man in dem zweyten Gliede vor das Wurzelzeichen + und — ſeßen, und auch die Wurzel ſelbſt, wenn man ſie ausgezogen hat, mit beyden Zeichen nehmen muß: daß alſo in jeder Gleichung vom zweyten Grade die unbekannte Größe zweyerley Werthe har.

Die Hälfte des Coeficienten von x kann man leicht bekommen, wenn man dieſen Coeficienten, oder wenn es mehrere ſind, die Summe der Coeficienten durch zwey dividirt, oder wenn dieſe Diviſion nicht ohne Reſt angeht, 2 als den Denominator darunter ſchreibe.

Alles dieſes kann man in folgenden Exempeln ſehen.

Man ſoll die Gleichung $2x^2 = 4x + 16$ auflöſen. Weil x^2 mit 2 multiplicirt iſt, ſo dividire man die ganze Gleichung durch 2, und ſchaffe alſo dieſen Coeficienten weg. Man bekommt $x^2 = 2x = +8$; ſetze man alle Theile, ſo ein x haben, auf die erſte Seite: hieraus entſteht $x^2 - 2x = 8$: der Coeficient von x iſt -2: deſſen Hälfte iſt -1. Deſſen Quadrat iſt $+1$: ſetze man dieſes zu beyden Gliedern: ſo bekommt man $x^2\ 2x + 1 = 8 + 1 = 9$. Ziehe man aus dem erſten Gliede die Quadratwurzel. Dieſe Wurzel zu finden braucht es gar kein Rechnen: ſie beſteht nämlich aus zweyen Gliedern: das erſte iſt x, das zweyte die Hälfte des Coeficienten -2, nämlich -1: die ganze Wurzel iſt alſo $x - 1$. Ziehe man eben die Wurzel aus dem andern Gliede der Gleichung, nämlich aus 9, nehme man ſie aber mit beyden Zeichen + und −; ſie iſt ± 3. Man hat alſo nunmehr $x - 1 = \pm 3$. Setze man den bekannten Theil -1 auf die andere Seite: hieraus entſteht $x = 1 \pm 3$. Der Werth der unbekannten Größe iſt alſo $x = 1 + 3$, das iſt 4, oder auch $1 - 3$, das iſt -2. Man ſehe hier die ganze Bearbeitung.

$$2x^2 = 4x + 16$$
$$x^2 = 2x + 8$$
$$x^2 - 2x = 8$$
$$x^2 - 2x + 1 = 8 + 1 = 9$$
$$x - 1 = \pm 3$$
$$x = 1 \pm 3 = 4 \text{ oder auch } -2.$$

Es ſey die Gleichung $\frac{3x^2}{5} - 18 = 2x.$
Man ſchaffe den Diviſor 5 weg, indem man die ganze Gleichung dadurch multiplicirt. Es entſteht $3x^2 - 90 = 10x$. Schaffe man den Coeficienten 3 weg, indem man die ganze Gleichung dadnrch dividirt. Es entſteht $x^2 - 30 = \frac{10x}{3}$. Bringe man alle x auf die erſte, das gänzlich bekannte Glied auf die andere Seite. Es entſteht $x^2 - \frac{10x}{3} = 30$: der Coeficient von x iſt $-\frac{10}{3}$: deſſen Hälfte erhebe man zum Quadrate: es iſt $\frac{25}{9}$: dieſes Quadrat ſetze man zu beyden Gliedern: hieraus entſteht $x^2 - \frac{10x}{3} + \frac{25}{9} = 30 + \frac{25}{9}$: ziehe man die Quadratwurzel aus dem erſten Gliede: ſie muß beſtehen aus x und dem halben Coeficienten, den x in der Gleichung hatte: ſie iſt alſo $x - \frac{5}{3}$. Vor das zweyte Glied der Gleichung ſetze man das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ mit + und

$+$ und $-$. Hieraus entſteht $x - \frac{5}{3} = \pm \sqrt{30 + \frac{25}{9}}$: ſetze man den bekannten Theil $-\frac{5}{3}$ auf die andere Seite mit Veränderung ſeines Zeichens. Hieraus entſteht $x = \frac{5}{3} \pm \sqrt{30 + \frac{25}{9}}$. Um nun die Wurzel aus jener Zahl, die unter dem Wurzelzeichen ſteht, wenigſt beynahe ausziehen zu können, ſo bringe man alles unter einen Bruch: hieraus entſteht $x = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{295}{9}}$. Nun ziehe man die Quadratwurzel, beſonders aus dem Numerator und wieder beſonders aus dem Denominator, und ſchreibe man ſie unter einander in Geſtalt eines Bruchs. Die Wurzel des Numerators iſt, wenn man ſie in Decimalen ſucht, beynahe 17. 176. Die Wurzel des Denominators iſt genau 3. Die Gleichung wird nunmehr alſo ſtehen $x = \frac{5}{3} \pm \frac{17.\ 176}{3}$. Wenn man nun dieſe beyden Brüche in Decimalbrüche verwandelt, ſo bekommt man anſtatt des erſten Bruchs $\frac{5}{3}$ dieſen 16666, und anſtatt des zweyten dieſen 5.7253: die vorige Gleichung wird alſo in dieſe verwandelt $x = 1{,}6666 \pm 5.7253$. Wenn man endlich den zweyten Decimalbruch mit dem Zeichen $+$ nimmt, und alſo zum erſten addirt, ſo entſteht $x = +7.3919$. Wenn man aber den zweyten Bruch mit dem Zeichen $-$ nimmt, und alſo den erſten kleinern davon abzieht, ſo entſteht $x = -4.0587$: die zween Werthe von x in dieſer Gleichung ſind alſo

 $+7.3919$,

$+7.3919$, und -4.0587. Man ſehe hier die ganze Ordnung der Berechnung.

$$\frac{3x^2}{5} - 18 = 2x$$

$$3x^2 - 90 = 10x$$

$$x^2 - 30 - \frac{10x}{3}$$

$$x^2 - \frac{10x}{3} = 30$$

$$x^2 - \frac{10x}{3} + \frac{25}{9} = 30 + \frac{25}{9}$$

$$x - \frac{5}{3} = \pm\sqrt{30 + \frac{25}{9}}$$

$$x = \frac{5}{3} \pm \sqrt{30 + \frac{25}{9}}$$

$$x = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{295}{9}}$$

$$x = \frac{5}{3} \pm \frac{17.176}{3}$$

$$x = 1{,}6666 \pm 5{,}7253$$

$$x = 7.3919 \text{ oder auch } -4.0587.$$

Es ſey die Gleichung $x^2 - 12 = -5x$. Nach der Verſetzung hat man $x^2 + 5x = 12$. Der halbe Coeficient von x iſt $\frac{5}{2}$: deſſen Quadrat iſt $\frac{25}{4}$: wenn man dieſes zu beyden Gliedern addirt, ſo entſteht $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = 12 + \frac{25}{4}$. Wenn man aus dem erſten Gliede die Wurzel zieht, vor das zweyte aber das Wurzelzeichen ſetzt, ſo bekommt man $x + \frac{5}{2}$ $= \pm$

$=\pm\sqrt{12+\frac{25}{4}}$. Wenn man, was unter dem Wurzelzeichen ſteht, unter einen Bruch bringt, ſo hat man $x+\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{73}{4}}$. Wenn man den bekannten Theil $\frac{5}{2}$ verſetzt, ſo entſteht $x=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{73}{4}}$. Wenn man aus dem Zähler und Nenner die Quadratwurzel zieht, ſo bekommt man $x=-\frac{5}{2}+\frac{8,544}{2}$. Wenn man beyde Brüche in Decimalbrüche verändert, ſo wird $x=-2,5\pm4,272$. Wenn man endlich den zweyten Bruch mit dem Zeichen $+$ nimmt, ſo entſteht $x=1,772$. Nimmt man ihn aber mit dem Zeichen $-$, ſo wird $x=6,772$. Die Werthe von x in dieſer Gleichung ſind alſo $1,772$ und $-6,772$.

Es ſey die Gleichung $x^2-6x=-10$. Der halbe Coeficient iſt -3, deſſen Quadrat iſt $+9$: dieſes beyderſeits addirt giebt $x^2-6x+9=-10+9=-1$. Wenn man aus dem erſten Theile die Wurzel zieht, und dem zweyten das Wurzelzeichen vorſetzt, ſo bekommt man $x-3=\pm\sqrt{-1}$, und nach der Verſetzung $x=3\pm\sqrt{-1}$. Weil nun die unter dem Wurzelzeichen ſtehende Größe negativ iſt, ſo kann unmöglich eine Quadratwurzel daraus gezogen werden. Die Werthe von x ſind alſo in dieſer Gleichung beyde unmöglich. Man ſehe hier die Berechnung.

$$x^2 - 6x = -10$$
$$x^2 - 6x + 9 = -10 + 9 = -1$$
$$x - 3 = \pm\sqrt{-1}$$
$$x = 3 \pm \sqrt{-1}.$$

Es ſey die Gleichung $4a^2 - 2x^2 + 2ax = 18ab - 18b^2$: durch die Verſetzung entſteht $-2x^2 + 2ax = 18ab - 18b^2 - 4a^2$: und nach Veränderung aller Zeichen $2x^2 - ax = -18ab + 18b^2 + 4a^2$. Nach Wegſchaffung des Coeficient $2, x^2 - ax = -9ab + 9b^2 + 2a^2$. Wenn man den halben Coeficienten von x, nämlich $-\frac{a}{2}$ zum Quadrate erhebt, und dieſes beyderſeits addirt, ſo entſteht $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = -9ab + 9b^2 + 2a^2 + \frac{a^2}{4}$. Wenn man aus dem erſten Gliede die Quadratwurzel auszieht, vor das zweyte das Wurzelzeichen ſetzt, ſo entſteht $x - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{-9ab + 9b^2 + 2a^2 + \frac{a^2}{4}}$.

Wenn man das bekannte Glied $-\frac{a}{2}$ verſetzt, ſo entſteht $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-9ab + 9b^2 + 2a^2 + \frac{a^2}{4}}$.

Wenn man alles, was unter dem Wurzelzeichen ſteht, unter einen Bruch bringt, ſo hat man

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{-36ab + 36b^2 + 9a^2.}{4}}$$

Läßt

Läßt ſich die Quadratwurzel aus dem Numerator und Denominator genau ausziehen: ſo ziehe man ſie alſo aus: man bekommt $\frac{3a-6b}{2}$ oder auch $\frac{-3a+6b}{2}$: wenn man die erſte aus dieſen zwoen Wurzeln nimmt, ſo entſteht $x = \frac{a}{2} + \frac{3a-6b}{2}$ od. $\frac{4a-6b}{2}$, das iſt, $2a - 3b$. Nimmt man aber die letzte aus dieſtn zwoen Wurzeln, ſo hat man $x = \frac{a}{2} - \frac{3a+6b}{2}$ oder $-\frac{2a+6b}{2}$ oder $-a+3b$. Dieſe zween Werthe von x in dieſer Gleichung ſind alſo $2a+3b$ und $-a+3b$. Man ſehe hier die Ordnung der Berechnung.

$$4a^2 - 2x^2 + 2ax = +18ab - 18b^2$$
$$-2x^2 + 2ax = 18ab - 18b^2 - 4a^2$$
$$2x^2 - 2ax = -18ab + 18b^2 + 4a^2$$
$$x^2 - ax = -9ab + 9b^2 + 2a^2$$
$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = -9ab + 9b^2 + 2a^2 + \frac{a^2}{4}$$
$$x - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{-9ab + 9b^2 + 2a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-9ab + 6b^2 + 2a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{-36ab + 36b^2 + 9a^2}{4}}$$

$$x = \frac{a}{2} + \frac{3a - 6b}{2}$$

$$x = \frac{a}{2} + \frac{3a - 6b}{2} = \frac{4a - 6b}{2} = 2a - 3b$$

$$x = \frac{a}{2} - \frac{3a + 6b}{2} = \frac{-2a + 6b}{2} = a + 3b$$

Anmerkung.

Man ſieht hier, daß, wenn man die gefundene Wurzel $3a - 6b$ negativ, das iſt, im verkehrten Verſtande nehmen wollte, man alle Zeichen derſelben verändern, und alſo anſtatt $3a - 6b$ ſchreiben müßte, $-3a + 6b$. Welches man für allezeit ſich wohl merken muß.

I.	II.
$x^2 = a$	$x^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$x = \pm\sqrt{a}$	$x = \pm(a + b)$
	$x = a + b$, oder auch $-a - b$

III.

$x^2 = 4a^2 - 8ab + 4b^2$
$x = \pm(2a - 2b)$
$x = 2a - 2b$, oder auch $-2a + 2b$.

IV.

$$x^2 = 2c^2x + 2c^2a$$
$$x^2 - 2c^2x + 2c^2a$$
$$x^2 - 2c^2x + c^4 = 2c^2 + c^4$$
$$x - c^2 = \pm\sqrt{2c^2a + c^4}$$
$$x = c^2 \pm \sqrt{2c^2a + c^4}$$

V.

$$x^2 = -5 + 6x$$
$$x^2 - 6x = -5$$
$$x^2 - 6x + 9 = -5 + 9 = 4$$
$$x - 3 = +2$$
$x = 3 \pm 2 = 5$, oder auch 1.

Achter Abſchnitt.

Von den algebraiſchen Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen.

§. 106.

Es iſt oben §. 84. geſagt worden, in einer unbeſtimmten Gleichung habe jede unbekannte Größe unendlich vielerley Werthe. Allein, wenn man ſo viele verſchiedene, von einander unabhängige Gleichungen hat, als viele unbekannte Größen ſind, kann man zu einer ſolchen Gleichung gelangen, welche nur noch eine unbekannte Größe in ſich hat, deren Werth hiemit beſtimmt ſeyn wird. Dieſes kann auf dreyerley Arten geſche-

geſchehen: 1) durch die Subſtitution: 2) durch die Vergleichung der Werthe, und 3) durch die Addition oder Subtraction.

§. 107.

Erſte Art.

Durch die Subſtitution.

In einer aus den Anfangs gegebenen Gleichungen ſucht man den Werth von was immer für einer unbekannten Größe. Setze man dieſen in den übrigen Gleichungen anſtatt eben dieſer unbekannten Größe. Hieraus entſtehen neue Gleichungen, in denen ſelbe unbekannte Größe nicht mehr anzutreffen iſt. In einer aus dieſen ſuche man den Werth einer andern unbekannten Größe: dieſen ſetze man abermal in den übrigen anſtatt dieſer unbekannten Größe. Hieraus entſtehen wieder neue Gleichungen, in denen ſchon zwo unbekannte Größen abgehen. Setze man dieſes ſo lange fort, bis man zu einer einzigen Gleichung gelangt, welche nur noch eine unbekannte Größe in ſich hat. Wenn man nun den Werth dieſes unbekanntrn Größe in dieſer letzten Gleichung ſucht, ſo wird man ihn in lauter bekannten Größen finden: und wenn man dieſen gänzlich beſtimmten Werth dieſer unbekannten Größe in einer aus den vorhergehenden Gleichungen anſtatt derſelben ſetzt; ſo kann man den Werth einer andern unbekannten

kannten

kannten Größe ebenfalls gänzlich beſtimmen: und wenn man ferner die Werthe dieſer zwo unbekannten Größen wieder in einer vorhergehenden Gleichung anſtatt derſelben ſetzt; ſo findet man den Werth der dritten, und alſo ferner, bis man endlich die Werthe aller unbekannten Größen gänzlich beſtimmt hat.

Zum Exempel.

Es ſeyn dieſe drey Gleichungen gegeben.

$$x + y = a$$
$$y + z = b$$
$$x + z = c.$$

Wenn man in der erſten aus dieſen gegebenen Gleichungen den Werth von x ſucht, ſo findet man $x = a - y$. Wenn man nun dieſen Werth von x in der dritten aus den gegebenen Gleichungen anſtatt x ſetzt, ſo entſteht $a - y + z = c$. Die zweyte aus den anfangs gegebenen Gleichungen bleibt unverändert, weil die unbekannte Größe x nicht darinn vorkömmt. Die zwo neuen Gleichungen, welche wir die zweyten nennen, ſind alſo dieſe:

$$y + z = b$$
$$a - y + z = c.$$

Wenn man in der erſten aus dieſen zwoen Gleichungen den Werth von y ſucht, ſo findet man $y = b - z$. Setzt man den Werth von y in der andern aus den zweyten Gleichungen anſtatt des y, ſo entſteht $a - b + z + z = c$.

In dieſer Gleichung nun iſt keine andere unbekannte Größe als z. Man kann alſo den Werth von z gänzlich beſtimmen; denn, wenn man beyde z zuſammenſetzt, ſo entſteht $2z + a - b = c$: und wenn man $+ ab$ verſetzt, ſo bekommt man $2z = c - a + b$. Wenn man endlich die ganze Gleichung durch 2 dividirt, ſo hat mn $z = \frac{c - a + b}{2}$. Setzt man nun dieſen gänzlich beſtimmten Werth von z in der vorhergehenden Gleichung $y = b - z$. Es entſteht $y = b \frac{-c + a - b}{2}$: und wenn man das ganze zweyte Glied unter einen Bruch bringt, ſo entſteht $y = \frac{2b - c + a - b}{2}$: wenn man endlich die b zuſammenſetzt, ſo hat man $y = \frac{b - c + a}{2}$. Setzt man den alſo gefundenen Werth von y in der vorhergehenden Gleichung $x = a - y$, ſo bekommt man $x = a \frac{-b + c - a}{2}$ wenn man das zweyte Glied unter einen Bruch bringt, ſo entſteht $x = \frac{2a - b + c - a}{2}$: ſetzt man die a zuſammen, ſo bekommt man $x = \frac{a - b + c}{2}$. Die Werthe

aller

aller drey unbekannten Größen ſind hiemit dieſe:

$$x = \frac{a - b + c}{2} : y = \frac{b - c + a}{2}\ z = \frac{c - a + b}{2}$$

Man ſehe hier die ganze Bearbeitung der Ordnung nach angeſetzt.

Erſte Gleichungen.

$x + y = a$ | $x = a - y$ der Werth von x in der erſten Gleichung.
$y + z = b$ |
$x + z = a$ |

hieraus entſtehen

dieſe zweyte Gleichungen. $\begin{cases} y + z = b \\ a - y + z = c \end{cases}$ | $y = b - z$ der Werth von y in der erſten aus den zweyten Gleichungen.

hiers entſtehen

dieſe dritte Gleichung: $\{ a - b + z + z = c$

folglich iſt $2z = c - a + b$

$$z = \frac{c - a + b}{2}$$

$$y = b \frac{-c + a - b}{2} = \frac{b - c + a}{2}$$

$$x = a \frac{-b + c - a}{2} = \frac{a - b + c}{2}$$

Zweytes Exempel.

Erſte Gleichungen.

$$3x - 2y = 5$$
$$2y + x = 7$$

$$x = \frac{5 + 2y}{3}$$

Hieraus entſteht dieſe zweyte Gleichung.

$$2y + \frac{5 + 2y}{3} = 7$$
$$6y + 5 + 2y = 21$$
$$8y = 21 - 5 = 16$$

$$y = \frac{16}{8} = 2$$
$$x = \frac{5 + 4}{3} = 3$$

Drittes Exempel.

Erſte Gleichungen.

$$2ax - by = c$$
$$3by + 5x = d$$

$$x = \frac{c + by}{2a}$$

Hieraus entſteht dieſe zweyte Gleichung.

$$3by + \frac{5c + 5by}{2a} = d$$
$$6aby + 5c + 5by = 2ad$$
$$6bby + 5by = 2ad - 5c$$
$$y = \frac{2ad - 5c}{6ab + 5b}$$

Wenn

Wenn man nun in der Gleichung $2ax - by = c$ dieſen Werth von y anſtat des y ſetzt, ſo entſteht

$$2ax - \frac{2abd + 5bc}{6ab + 5b} = c$$

$$12a^2bx + 10abx - 2abd + 5bc = 6abc + 5bc$$

$$12a^2bx + 10abx = 6abc + 5bc - 5bc + 2abd$$

$$x = \frac{6abc + 2abd}{12a^2b + 10ab}$$

$$x = \frac{3c + d}{6a + 5}$$

Viertes Exempel.

Man ſuche zwey Zahlen, deren Summe 15 und die Differenz 7 iſt?

Es ſey die größere Zahl $= x$. und die kleinere Zahl $= y$.
ſo iſt vermöge der Aufgabe $x + y = 15$
und $x - y = 7$.

Aus der erſten bekommt man $x = 15 - y$.
aus der zweyten : : : : $x = 7 + y$.

Hieraus entſpringt nun die neue Gleichung

$$15 - y = 7 + y.$$

addirt man y, ſo hat man $15 = 7 + 2y$, man ſubtrahire 7, ſo wird $15 - 7 = 2y = 2y = 8$, durch 2 dividirt wird $y = 4$ und folglich $x = 11$.

Antwort, die kleinere Zahl iſt 4, und die größere 11.

§. 108.

Zweyte Art.

Durch die Vergleichung der Werthe.

In einer jeden aus den gegebenen Gleichungen ſucht man den Werth von einer nämlichen unbekannten Größe, z. Ex. von x. Dieſe Werthe ſind nothwendig einander gleich. Man hat alſo neue Gleichungen, in welchen ſchon eine unbekannte Größe abgeht. In dieſen Gleichungen ſucht man die Werthe einer andern unbekannten Größe. Dieſe ſind einander wieder gleich. Es entſtehen alſo neue Gleichungen, in welchen ſchon zwo unbekannte Größen abgehen, u. ſ. f. bis man eine Gleichung erhält, in welcher nur noch eine unbekannte Größe vorkommt. Wenn man nun den Werth dieſer unbekannten Größe in dieſer letzten Gleichung in lauter bekannten Größen gefunden hat, und denſelben aus den vorhergehenden Gleichungen anſtatt eben dieſer unbekannten Größe ſetzt, ſo kann man den Werth einer andern unbekannten Größe wieder gänzlich beſtimmen. Und, wenn man den Werth dieſer zwo unbekannten Größen wieder in einer aus den vorhergehenden Gleichungen ſetzt, ſo findet man den Werth der dritten u. ſ. f.

ſ. f. bis man endlich den Werth aller unbekannten Größen gefunden hat.

Zum Exempel.

Es ſeyn gegeben dieſe Gleichungen $\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ x+z=c \end{cases}$

Suche man den Werth von x in der erſten und dritten. Er iſt

in der erſten $x=a-y$
in der dritten $x=c-z$
hieraus entſteht $a-y=c-z$

weil die zweyte aus den gegebenen Gleichungen kein x in ſich hat, ſo bleibt ſie unverändert. Man hat alſo dieſe zwo zweyten Gleichungen.

$$a-y=c-z$$
$$y+z=b.$$

Suche man nun in beyden den Werth von y.

Die erſte giebt $y=a+z-c$
Die zweyte $y=b-z$
Hieraus erſteht $a+z-c=b-z.$

In dieſer iſt keine andere unbekannte Größe, als z. Suche man alſo den Werth von z. Man bekommt:

$$2z = b + c - a$$

und folglich $z = \frac{b + c - a}{2}$

Setze man dieſen Werth von z in der Gleichung $y + z = b$ anſtatt des z:

Hieraus entſteht $y + \frac{b + c - a}{2} = b$.

Wenn man den Bruch aufhebt, ſo bekommt man $2y + b + c - a = 2b$: und nach der Verſetzung $2y = 2b - b - c + a$: und endlich $y = \frac{b - c + a}{2}$.

Setze man dieſen Werth von y in der Gleichung $x + y = a$ anſtatt des y. Man bekommt $x + \frac{b - c + a}{2} = a$. Und wenn man den Bruch aufhebt, ſo erhält man $2x + b - c + a = 2a$. Und durch die Verſetzung $2x = 2a - a + c - b$. Und endlich $x = \frac{a + c - b}{2}$. Die Werthe der drey unbekann-

bekannten Größen ſind alſo $x = \frac{a - b + c}{2}$ $y = \frac{b - c + a}{2}$ $z = \frac{b + c - a}{2}$. Alle drey ſind eben dieſelben, die man oben nach der erſten Art gefunden hat.

Zweytes Exempel.

Erſte Gleichungen.

Es ſey $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2y + x = 7 \end{cases}$	$x = \frac{5 + 2y}{3}$
Hieraus entſteht	$x = 7 - 2y$
Dieſe zweyte $\frac{5 + 2y}{3} = 7 - 2y$	
$5 + 2y = 21 = 6y$	$y = \frac{16}{8} = 2$
$8y = 21 - 5 = 16$	
	$x = 7 - 4 = 3$

Drittes Exempel.

Erſte Gleichungen.

Es ſey $\left\{ \begin{array}{l} 2ax - by = c \\ 3by + 5x = d \end{array} \right.$ $\quad x = \frac{c + by}{2a}$

Hieraus entſteht

Dieſe zweyte $\frac{c + by}{2a} = \frac{d - 3by}{5}$ $\quad x = \frac{d - 3by}{5}$

$5c + 5by = 2ad - 6abyc$

$6aby - 5by = 2ad - 5$

$y = \frac{2ad - 5c}{5ab + 5b}$

Und wenn man dieſen Werth von y in der Gleichung $2ax - by$ anſtatt des y ſetzt,

ſo entſteht $2ax = \frac{2abd + 5bc}{6ab + 5b} = c$

$12a^2bx + 10abx - 2abd + 5bc = 6abc + 5bc$

$12a^2bx + 10abx = 6abc + 5bc - bc - 2abd$

$x = \frac{6abc + 2abd}{12a^2b + 10ab}$

$x = \frac{3c + d}{6a + 5}$

Viertes Exempel.

Es ſeyn gegeben dieſe drey erſten Gleichungen.

$$2x + 3y + z = 14$$
$$x - z + 2y = 7$$
$$z - y - 2x = -6.$$

Wenn man in einer jeden aus dieſen dreyen den Werth von x ſucht, ſo findet man

In der erſten $x = \frac{14 - 3y - z}{2}$

In der zweyten $x = 7 - 2y + z$

In der dritten $x = \frac{6 - y + z}{2}$

Vergleicht man den erſten Werth mit dem zweyten, und alsdenn auch mit dem dritten, ſo entſtehen folgende zwey Gleichungen.

$$\frac{14 - 3y - z}{2} = 7 - 2y + z$$

$$\frac{14 - 3y - z}{2} = \frac{6 - y + z}{2}$$

Suche man in der erſten aus dieſen zweyen Gleichungen den Werth von y, ſo geht es alſo her:

$$15 - 3y - z = 14 - 4y + 2z$$
$$4y - 3y = 2z + z + 14 - 14$$
$$y = 3z$$

Suche man den Werth von y in der andern aus den zweyten Gleichungen, ſo findet man

$14 - 3y$

$$14-3y-z=6-y+z$$
$$-3y+y=6-14+z+z$$
$$-2y=-8+2z$$
$$2y=8-2z$$
$$y=4-z$$

Vergleicht man dieſe zween Werthe von y mit einander, ſo hat man

$$3z=4-z$$
$$4z=4$$
$$z=1$$

Setzt man den Werth von z in der Gleichung $y=3z$, ſo bekommt $y=3\times 1=3$.

Setzt man den Werth von y und z in der Gleichung $x=\frac{14-3y-z}{2}$, ſo bekommt man

$$x=\frac{14-9-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Die Werthe der unbekannten Größen ſind hiemit dieſe: $x=2$. $y=3$. $x=1$.

§. 109.

Dritte Art.

Durch die Addition und Subtraction.

Wenn in zwoen aus den gegebenen erſten Gleichungen eine nämliche unbekannte Größe mit

mit dem nämlichen Coëfficienten anzutreffen iſt, ſo addirt man dieſe zwo Gleichungen zuſammen (nämlich das erſte Glied zum erſten, das zweyten zum zweyten) oder man ſubtrahirt ſie von einander. Addiren muß man ſie, wenn die unbekannte Größe in den zwoen Gleichungen verſchiedene Zeichen haben: haben ſie aber das nämliche Zeichen, ſo muß man die Subtraction brauchen. Alſo wird dieſe unbekannte Größe wegfallen. Auf gleiche Art kann man auch die übrigen unbekannten Größen wegſchaffen, bis man endlich nur noch eine hat, deren Werth man alſo gänzlich beſtimmen kann.

Zum Exempel.

$$x + y = a$$
$$y + z = b$$
$$x + z = c$$

Wenn man die dritte Gleichung von der erſten abzieht, ſo entſteht $y - y = c$
man hat aber ſchon oben $y + z = b$

Wenn man nun die gefundene von dieſer letzten abzieht, ſo bekommt man $2z = b + c - a$ und aus dieſer $z = \frac{b + c - a}{2}$ wie oben nach der erſten und zweyten Art.

Wenn

Wenn man dieſe von der obigen $y+z=b$ abzieht, ſo entſteht

$$y=b\frac{-b-c+a}{2}=\frac{b-c+a}{2} \text{ wie oben.}$$

Wenn man dieſe letzte von der erſten $x+y=a$ abzieht, ſo bekommt man

$$x=a\frac{-b+c-a}{2}=\frac{a-b+c}{2} \text{ wie oben.}$$

Zweytes Exempel.

Es ſey $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 2y+x=7 \end{cases}$

Addire man die erſte zur zweyten. Es entſteht $4x=5+7=12$

$x=\frac{12}{4}=3$ wie oben.

§. 110.

Zuweilen muß man eine kleine Vorbereitung machen, ehe man dieſer Art ſich bedienen kann. Dieſe Vorbereitung aber beſteht darinn, daß man der unbekannten Größe, die man wegſchaffen will, in beyden Gleichungen einen nämlichen Coeficienten gebe, welches man durch die Multiplication leicht erhält. Die allgemeine Regel, hiezu zu gelangen, iſt dieſe. Man multiplicire die ganze erſte Gleichung durch den Coeficienten, den die unbekannte Größe, die man wegſchaffen will, in der zweyten

ten Gleichung hat: man multiplicire ebenfalls die ganze zweyte Gleichung durch den Coeſicienten, den eben dieſe unbekannte Größe in der erſten Gleichung hat. Jedoch läßt ſich die Sache zuweilen etwas leichter verrichten, welches man am beſten durch die Uebung erlernen kann.

Zum Exempel.

Es ſey $\begin{cases} 2ax - by = c. \\ 3by + 5x = d \end{cases}$

Multiplicire man die erſte Gleichung durch den Coeficienten von x in der zweyten, nämlich durch 5: die zweyte durch den Coeficienten von x in der erſten, nämlich durch $2a$: es entſtehen folgende zwo neue:

$$10ax - 5bz = 5c$$
$$6aby + 10ax = 2ad$$

Subtrahire man die untere von der obern: es entſteht $-5by - 6aby = 5c - 2ad$
oder $5by + 6aby = 2ad - 5c$

$$y = \frac{2ad - 5c}{5b + 6ab}$$ wie oben.

Halte man nun dieſe letzte Gleichung gegen einer aus den Anfangs gegebenen: etwa gegen der Gleichung $2ax - by = c$.

Weil in dieſer Gleichung das y den Coeficienten b hat, ſo multiplicire man die vorhergehende Gleichung durch b.

Man

Man bekommt

$$by = \frac{2abd - 5bc}{5b + 6ab} = \frac{2ad - 5c}{5 \times 6a}$$

Addire man beyde. Es entſteht

$$2ax = c + \frac{2ad - 5c}{5 + 6a};$$

und aus dieſer

$$10ax + 12a^2x = 5c + 6ac + 2ad - 5c$$
$$10ax + 12a^2x = 5ac + 2ad$$
$$x = \frac{6ac + 2ad}{10a + 12a^2} = \frac{2c + d}{5 + 6a}$$ wie oben.

Zweytes Exempel.

Es ſey $$\begin{cases} 3x + 3y + z = 14 \\ x - z + 2y = 7 \\ 2y - 2x = -6 \end{cases}$$

Addire man die erſte Gleichung zur zweyten, und ſubtrahire man die dritte von der erſten, ſo entſtehen folgende zwo gleichungen, in denen das z ausgemuſtert iſt.

$$3x + 5y = 14 + 7 = 21$$
$$4x + 4y = 14 + 6 = 20$$

Multiplicire man die erſte aus dieſen zwoen neuen Gleichungen durch 4, die andere durch 3, ſo entſtehen dieſe zwo neuen, in denen das x den nämlichen Coeficienten hat.

$$12x + 20y = 84$$
$$12x + 12y = 60$$

Subtrahire man die untere von der obern. Es entſteht dieſe neue Gleichung.

$$20y - 22y = 84 - 60$$
$$8y = 24$$
$$y = 3 \text{ wie oben.}$$

Halte man nun dieſe letzte Gleichung gegen einer aus den vorhergehenden, in der nur die unbekannten Größen x und y vorkommen: etwa gegen der Gleichung

$$3x + 5y = 21.$$

Multiplicire man die Gleichung $y = 3$ durch 5, ſo entſteht eine Gleichung, in welcher das y eben den Coeficienten 5 als wie in der vorhergehenden hat, nämlich

$$5y = 15.$$

Subtrahire man dieſe von der vorhergehenden. Es entſteht $3x = 21 - 15 = 6$

$$x = \frac{6}{3} = 2 \text{ wie oben.}$$

Man kann auf gleiche Art fortfahren, um den Werth von z zu beſtimmen. Allein es wird geſchwinder geſchehen ſeyn, wenn man in einer aus den Anfangs gegebenen Gleichungen, etwa in der Gleichung $2x + 3y + z = 14$ die ſchon gefundenen Werthe von y und z an ihrer Statt ſetzt.

Es entſteht $5+9+z=14$
$z=14-9-4=1$ wie oben.

§. 111.

Man mag ſich was immer für einer Art, aus dieſen dreyen erklärten, bedienen, ſo wird doch die Arbeit, da man die Werthe für zwo, und noch vielmehr für drey unbekannten Größen ſucht, ſchon etwas weitläuftig. Eine andere Art, durch welche man die Werthe von zwoen, und auch von dreyen unbekannten Größen ohne allen Umſchweif finden und herſchreiben kann, iſt folgende.

Man bringe was immer für zwo gegebene Gleichungen unter dieſe Form.

$$ax+by=c$$
$$dx+ey=f$$

Den Werth von y zu finden multiplicire man a, den Coeficienten von x in der erſten Gleichung durch f, das gänzlich bekannte Glied der zweyten Gleichung. Multiplicire man d den Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch c, das gänzlich bekannte Glied der erſten Gleichung. Ziehe man dieſes zweyte Produkt von dem erſten ab, ſo hat man $af-cd$ den Numerator jenes Bruchs, der dem y gleich iſt. Um den Denominator zu finden, multiplicire man a den Coeficienten von x in der erſten Gleichung durch e den Coeficienten von y in der zweyten Gleichung: und den Coefi-

Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch den Coeficienten von y in der erſten Gleichung. Ziehe man das zweyte Produkt von dem erſten ab, ſo hat man $ae - bd$ den verlangten Denominator. Es wird alſo in unſern zwoen Gleichungen ſeyn

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd.}$$

Den Werth von x zu bekommen, multiplicire man b, den Coeficienten von y in der erſten Gleichung durch f, das gänzlich bekannte Glied der zweyten Gleichung: und e, den Coeficienten von y in der zweyten Gleichung durch c, das gänzlich bekannte Glied der erſten Gleichung. Das zweyte Produkt ziehe man vom erſten ab: der Reſt $bf - ce$ iſt der Numerator des Bruchs, der dem x gleich iſt. Der Denominator iſt eben der, den man für y gefunden hat, aber mit Veränderung aller Zeichen. Es iſt alſo in unſern zwoen Gleichungen.

$$x = \frac{bf - ce}{bd - ae}$$

§. 112.

Wenn in den zwoen Gleichungen verſchiedene Zeichen vorkommen, ſo bleibt die ganze Art, der Werth der unbekannten Größen zu finden, vollkommen die nämliche, wenn man nur dieſes wohl merkt, daß man in jeder Ver-

richtung das erſte Produkt mit jenem Zeichen nehme, welches ihm kraft der Multiplication gebührt: das andere aber, weil es vom erſten abgezogen werden muß, mit verändertem Zeichen.

Erſtes Exempel.

Es ſey $\begin{cases} 2ax - by = c \\ 5x + 3by = d \end{cases}$

$$y = \frac{2ad - 5c}{6ab + 5b} \text{ wie oben.}$$

$$x = \frac{-bd - 3bc}{-6ab - 5b} = \frac{bd + 3bc}{6ab + 5b} = \frac{3c + d}{6a + 5}$$
wie oben.

Zweytes Exempel.

Es ſey $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

$$y = \frac{21 - 5}{6 + 2} = \frac{16}{8} = 2 \text{ wie oben.}$$

$$x = \frac{-14 - 10}{-8} = \frac{24}{8} = 3 \text{ wie oben.}$$

Drittes Exempel.

Es ſey $\left\{\begin{array}{l} ax - by = c \\ dz - fy = g \end{array}\right.$

$$y = \frac{ag - cd}{-af + bd}$$

$$x = \frac{-bg + cf}{af - bd}$$

Viertes Exempel.

Es ſey $\left\{\begin{array}{r} -ax - by = c \\ dx + ey = -f \end{array}\right.$

$$y = \frac{af - cd}{-ae + bd}$$

$$x = \frac{bf - ce}{ae - bd}$$

§. 113.

Wenn in einer aus den zwoen Gleichungen eine unbekannte Größe abgeht, ſo iſt die ganze Art der Auflöſung noch die nämliche, wenn man nur den Abgang der unbekannten Größe durch ein Zeichen, etwa durch * anzeigt, und alsdenn merkt, daß alle jene Produkte, in welche der Coeficient der unbekannten Größe, welche dießmal abgeht, wenn ſie zugegen wäre, kommen müßte, gleich o werden und alſo wegfallen.

Erſtes Exempel.

Es ſey $\begin{cases} ax - by = c \\ dx \; * = f \end{cases}$

$$y = \frac{af - cd}{bd}$$

$$x = \frac{-bf}{bd} = \frac{bf}{bd} = \frac{f}{d}$$

Zweytes Exempel.

Es ſey $\begin{cases} ax + by = -c \\ * \; - dy = \;\; f \end{cases}$

$$y = \frac{af}{-ad} = -\frac{f}{d}$$

$$x = \frac{bf - cd}{ad}$$

§. 114.

Wenn drey unbekannte Größen und drey Gleichungen ſind; ſo bringt man ſie unter dieſe Form:

$$ax + by + cz = m$$
$$dx + ey + fz = n$$
$$gx + hy + kz = p.$$

Den Werth von z zu finden, multiplicire man den Coeficienten von x in der erſten Gleichung durch den Coeficienten von y in der zweyten, und durch das gänzlich bekannte Glied

Glied in der dritten. Multiplicire man ebenfalls den Coeficienten von x in der erſten Gleichung durch den Coeficienten von y in der dritten, und durch das gänzlich bekannte Glied der zweyten; ziehe man das zweyte Produkt von dem erſten ab. Man bekommt in dieſem Exempel $aep - ahn$.

Multiplicire man den Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch den Coeficienten von y in der dritten, und durch das gänzlich bekannte Glied der erſten: multiplicire man eben dieſen Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch den Coeficienten von y in der erſten, und durch das gänzlich bekannte Glied der dritten: ziehe man das zweyte Produkt vom erſten ab. Man bekommt in unſerm Exempel $ahm - bdp$.

Multiplicire man den Coeficienten von x in der dritten Gleichung durch den Coeficienten von y in der erſten, und durch das gänzlich bekannte Glied der zweyten: multiplicire man eben dieſen Coeficienten von x in der dritten Gleichung durch den Coeficienten von y in der zweyten, und durch das gänzlich bekannte Glied der erſten: ziehe man das zweyte Produkt von dem erſten ab. Man bekommt in unſerm Exempel $gbn - gem$.

Die Summe aus allen dieſen Produkten iſt der Numerator eines Bruchs, der dem z gleich iſt.

Den Nominator zu finden, multiplicire man den Coeficienten von x in der erſten durch den Coeficienten von y in der zweyten, und durch den Coeficienten von z in der dritten: multiplicire man eben dieſen Coeficienten von x in der erſten durch den von y in der dritten, und durch den von z in der zweyten. Ziehe man das zweyte Produkt vom erſten ab. Man bekommt $aek - ahf$.

Multiplicire man den Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch den von y in der dritten, und durch den von z in der erſten: multiplicire man eben dieſen Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch den von y in der erſten, und durch den von z in der dritten: ziehe man das zweyte Produkt vom erſten ab. Man bekommt $dhc - dbk$.

Multiplicire man den Coeficienten von x in der dritten Gleichung durch den von y in der erſten, und durch den von z in der zweyten: wie auch durch den von y in der zweyten, und durch den von z in der erſten: ziehe man das zweyte Produkt vom erſten ab. Man bekommt $gbf - gec$.

Die Summe aller dieſer Produkte iſt der Denominator.

Den Werth von y zu finden, verfahre man eben auf die Art: ausgenommen, daß

man

man den Numerator zu finden, die Coeficienten von y niemal braucht, ſondern an derer Statt die Coeficienten von z. Der Denominator iſt vollkommen der nämliche, aber mit Veränderung aller Zeichen.

Den Werth von x zu finden, werfahre man wieder auf gleiche Art, ausgenommen, daß man den Numerator zu finden die Coeficienten von x niemals brauchen muß: der Denominator iſt vollkommen der nämliche, den man für den Werth von z gefunden hat. Es wird in dieſem Exempel ſeyn:

$$z = \frac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}$$

$$y = \frac{afp - akn + dkm - dcp + gcn - gfm}{-aek + ahf - dhc + dbk - gbf + gec}$$

$$x = \frac{bfp - bkn + ekm - ecp + hcn - hfm}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}$$

So weitläuftig und dunkel nun dieſe Regel immer ſcheinen mag, ſo iſt ſie doch in der Ausübung leicht, und kürzt die Arbeit insgemein ſehr viel ab: ſie kann aber leichter durch die Uebung erlernet, als mit Worten erklärt werden.

Exempel.

Es ſey
$$\begin{cases} 2x+3y+z=14 \\ x+2y-z=7 \\ -2x-y+z=-6 \end{cases}$$

$$z=\frac{-24+14-14+18-42+56}{4-2-1-3+6+4}=\frac{8}{8}=1$$

$$y=\frac{12-14+14+6-14-28}{-8}=\frac{-24}{-8}=3$$

$$x=\frac{18-21+28+12-7-14}{8}=\frac{16}{8}=2$$

alles wie oben.

Zweytes Exempel.

Es ſey
$$\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ x+z=c \end{cases}$$

Schreibe man dieſe Gleichungen alſo an:

$$\begin{aligned} x+y\ *&=a \\ *\ +y+z&=b \\ x\ *\ +z&=c \end{aligned}$$

$$z=\frac{c+b-a}{1+1}=\frac{c+b-a}{2} \text{ wie oben.}$$

$$y=\frac{c-b-a}{-2}=\frac{b+a-c}{2} \text{ wie oben.}$$

$$x=\frac{c-b+a}{2} \text{ wie oben.}$$

Neun-

Neunter Abſchnitt.

Wie die algebraiſchen Gleichungen zu finden ſind.

§. 115.

Eine jede Gleichung muß durch die Bedingniſſe, welche die Aufgabe bey ſich hat, aufgelöſet werden. Aus dieſen Bedingniſſen müſſen ſo viele Gleichungen herausgezogen werden, als viele unbekannte, von einander unabhängige Größen in der Aufgabe ſind; kann man ſo viele finden, ſo iſt die Aufgabe beſtimmt, das iſt, es giebt nur einen Werth, oder doch nur eine beſtimmte Anzahl der Werthe für jede unbekannte Größe: kann man aber aus allen gegebenen Bedingniſſen nicht ſo viele Gleichungen finden, als unbekannte, von einander unabhängige Größen in der Aufgabe ſind, ſo iſt dieſe Aufgabe unbeſtimmt: das iſt, jede unbekannte Größe kann unendlich viele verſchiedene Werthe haben, durch welche alle den gegebenen Bedingniſſen ein Genüge geſchieht.

§. 116.

Wie die Gleichungen aus den Bedingniſſen der Aufgabe herzuleiten ſind, iſt oft ſehr ſchwer: man kann auch hiezu keine hinlängliche Regeln vorſchreiben. Ein aufgeklärter

ter Verſtand und die Uebung muß hierinn das Beſte thun. Man merke nur folgendes.

Erſtens: Muß man die Aufgabe wohl verſtehen, das, was gefragt wird, von dem, was bekannt, wohl unterſcheiden: die unbekannten Größen durch die letzten Buchſtaben des Alphabets *x*, *y*, *z*, die bekannten aber durch die erſten *a*, *b*, *c* benennen.

Zweytens: Muß man alles, was in der Aufgabe überflüßig iſt, und nichts zur Sache thut, außer Acht laſſen, und die Gedanken nur auf die Größen ſelbſt, und die Verhältniſſe derſelben richten.

Drittens: Wenn die Benennung aller Größen geſchehen iſt, muß man alle Bedingniſſe der Aufgabe aufmerkſam durchgehen, und eine jede derſelben algebraiſch ausdrücken.

Viertens: Muß man ſich hüten, daß man die Anzahl der unbekannten Größen nicht ohne Noth vermehre. Alſo, wenn man eine Größe, die man ſucht, *x* genennt hat, und wenn man noch eine andere ſucht, die aber das Doppelte, oder das Dreyfache der vorigen ſeyn ſoll, ſo muß man ſie nicht durch *z* oder *y*, ſondern mit $2x$, oder $3x$ benennen. Zum Exempel.

Man

41 Man ſoll eine Summe Geldes von 4000 Gulden alſo unter vier Perſonen theilen, daß die zweyte um 60 mehr bekomme, als die erſte: die dritte um 70 mehr, als die zweyte: die vierte um 80 mehr, als die dritte.

Wenn man dieſe Aufgabe wohl betrachtet, ſo ſieht man alſogleich, daß, wenn der Theil, was immer für Eines aus dieſen vier Menſchen bekannt wäre, man alſo gleich die Theile der Andern daraus herleiten könnte. Wenn z. E. der Theil des erſten bekannt wäre, dürfte man nur 60 zu demſelben addiren, um den Theil des zweyten zu bekommen: und wenn man zu dieſem 70 ſetzt, ſo entſtünde der Theil des dritten: und wenn man abermal zu dieſem 80 addirt, ſo wäre die Summe der Theil des vierten. Es hangen alſo alle vier Größen, die man ſucht, von einander ab, und iſt folglich nur eine unbekannte Größe in der Aufgabe, und eben darum nur eine Gleichung zu finden nothwendig.

Nachdem man die Sache alſo bedacht hat, ſchreite man zu der Benennung. Man benenne einen aus den vier Theilen, etwa den erſten, x. Die bekannten Größen der Aufgabe ſind dieſe, 4000, 60, 70, 80: benenne dieſe mit den erſten Buchſtaben des Alphabets, und ſetze man a anſtatt 4000, b anſtatt 60, c anſtatt 70, d anſtatt 80. Nun durchgehe

gehe man alle Bedingniſſe, und drücke man eine jede alſo gleich algebraiſch aus. Man wird etwa alſo ſchließen:

Der erſte Theil ſey : : : : : : x

Der zweyte muß um 60, oder um b größer ſeyn, als der erſte: er wird alſo ſeyn : : : : : : : : : : $x+b$

Der Theil des dritten muß um 70 oder c größer ſeyn, als der des zweyten: der Theil des dritten iſt alſo : : $x+b+c$

Der Theil des vierten muß um 80 oder um d größer ſeyn, als jener des dritten: Er wird alſo ſeyn : $x+b+c+d$

Die Summe aller dieſer vier Theile muß 4000 oder a ausmachen. Ich habe alſo dieſe Gleichung $4x+3b+2c+d=a$

Wenn man dieſe Gleichung nach den Regeln, die oben gegeben worden, auflöſet, ſo findet man $x=\frac{a-3b-2c-d}{4}$: und wenn man für die Buchſtaben wieder ihre Zahlen ſetzt, ſo hat man

$$x=\frac{4000-180-140-80}{4}$$ folglich

$$x=\frac{4000-400}{4}=\frac{3600}{4}=900$$

Nun

Nun iſt nichts leichters, als die Theile der übrigen zu finden.

$x = 900$ der Theil des erſten.
$+ 60$

960 der Theil des zweyten.
$+ 70$

1030 der Theil des dritten.
$+ 80$

1110 der Theil des vierten.

Wenn man dieſe vier Theile zuſammen addirt, ſo iſt die Summe 4000, wie es die Aufgabe verlangt, welches dann ein ſicherer Beweis iſt, daß die verlangten vier Theile richtig ſind gefunden worden.

2) Man ſoll vier Zahlen finden, deren Summe 33000 ausmache. Die zweyte Zahl aber zweymal ſo groß, als die erſte: die dritte dreymal ſo groß ſeyn, als die zweyte: die vierte viermal ſo groß, als die dritte.

Nenne man die erſte Zahl : : : x

Die zweyte muß zweymal ſo groß ſeyn. Alſo iſt ſie : : : : : : $2x$

Die dritte muß dreymal ſo groß ſeyn als die zweyte. Sie iſt alſo : : : $6x$

Die

Die vierte muß viermal ſo groß ſeyn als die dritte: folglich iſt ſie ; ; ; $24x$

Die Summe aus allen vieren iſt 33000: es entſteht alſo die Gleichung $33x = 33000$.

Die Auflöſung dieſer Gleichung gibt

$x = 1000$ die erſte Zahl
$\times 2$
2000 die zweyte
$\times 3$
6000 die dritte
$\times 4$
24000

Die Summe aller vier iſt 33000, wie es verlangt wurde.

3) Man ſoll drey Zahlen finden, derer Summe 360 (a) ausmache, und welche überdas ſo beſchaffen ſind, daß, wenn die zweyte Zahl durch die erſte dividirt wird, der Quotient 5 (b) ſey; wenn aber die dritte durch die zweyte dividirt wird, der Quotient 6 (c) entſtehe.

Nenne man die erſte aus den geſuchten Zahlen ; ; ; x
Die zweyte ; ; ; y
Die dritte ; ; ; z

Weil

Weil alle drey zuſammen 360 (a) ausmachen, ſo hat man dieſe erſte Gleichung. : : $x+y+z=a$

Weil die zweyte durch die zweyte dividirt b zum Quotienten giebt: ſo entſteht dieſe Gleichung : $\frac{y}{x}=b$

Weil die dritte durch die zweyte dividirt c zum Quotienten giebt; ſo iſt $\frac{z}{y}=c$

Man hat alſo gleichwie drey unbekannte Größen, alſo auch drey Gleichungen: die Aufgabe iſt alſo beſtimmt.

Die Auflöſung giebt $z=\frac{abc}{1+b+bc}=300$

$$y=\frac{b}{1+b+bc}=50$$

$$x=\frac{a}{1+b+bc}=10$$

Nun iſt die Summe dieſer drey Zahlen 360. Zweytens: die zweyte Zahl 50 durch die erſte 10 dividirt, giebt 5 zum Quotienten. Drittens: die dritte Zahl 300 durch die zweyte 50 dividirt, giebt 6 zum Quotienten: alles, wie es die Bedingniſſe der Aufgabe erfordern.

Erſte Anmerkung. Weil die Auflöſung immer weitläuftiger wird, je mehr unbekannte Größen darinn vorkommen, ſo kann man dieſe Aufgabe etwas leichter auflöſen, wenn man alſo folgern würde.

Die erſte aus den dreyen geſuchten Zahlen ſey : : : x

Die zweyte : : : y

Die dritte iſt nicht nöthig durch einen neuen Buchſtaben zu benennen. Denn, weil die Summe aller drey a gleich ſeyn muß, ſo muß die dritte der Reſt ſeyn, welcher überbleibt, wenn die erſte und zweyte von der Summe abgezogen wird.

Die dritte kann alſo heißen $a - x - y$

Nun giebt die zweyte durch die erſte dividirt, b zum Quotienten, alſo iſt $\frac{y}{x} = b$

Die dritte durch die zweyte dividirt, giebt c zum Quotienten, folglich iſt

$$\frac{a - x - y}{y} = c$$

So hat man dann, gleichwie zwo unbekannte Größen, alſo auch zwo Gleichungen. Man kann hiemit die geſuchten Zahlen finden. Die Auflöſung giebt

$x =$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{a}{bc+b+1} = 10 \\ y = \dfrac{ba}{bc+b+1} = 50 \\ a - x - y = 360 - 50 - 10 = 300 \end{array}\right\}$$ alles wie zuvor.

Aus dieſem ſieht man, daß man zuweilen eine in der Aufgabe geſetzte Bedingniß entweder brauchen könne, eine Gleichung zu finden, oder die Benennung alſo zu machen, daß eine unbekannte Größe erſparet werde.

Zweyte Anmerkung. Ja man kann eben dieſe Aufgabe alſo auflöſen, daß nur eine unbekannte Größe in die Auflöſung komme, wenn man ſich nur eines Grundſatzes, der in der Arithmetik iſt erwieſen worden, erinnern will. Denn man kann alſo folgern:

Die erſte aus den geſuchten dreyen Zahlen ſoll heißen : : x

Die zweyte durch die erſte dividirt muß 5 (b) zum Quotienten geben: weil alſo der Diviſor durch den Quotienten multiplicirt, den Dividendus hervorbringt, ſo muß die zweyte aus den geſuchten Zahlen ſeyn : : : bx

Die dritte durch die zweyte dividirt, muß 6 (c) zum Quotienten geben. Alſo muß die dritte ſeyn : : bcx

Alle drey zuſammen müſſen 360 (a) ausmachen: man hat alſo dieſe Gleichung . . . $x+bx+bx=a$

Hieraus entſteht

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{a}{1+b+bc}=10 \text{ die erſte}\\[2ex] bx=\dfrac{ab}{1+b+bc}=50 \text{ die zweyte}\\[2ex] bcx=\dfrac{abc}{1+b+bc}=300 \text{ die dritte}\end{array}\right\}\text{alles wie zuvor.}$$

4) Ein Student iſt dem Müßiggange ziemlich ergeben. Sein Vater will ihn zum Studieren antreiben, er legt ihm etwas zu erlernen vor, und macht zugleich folgenden Vertrag mit ihm. Für jeden Tag, den er fleißig zum Studieren angewendet haben werde, wolle er ihm 5 Gulden zur Belohnung geben. Für jeden hingegen, den er mit Müßiggehen verzehren würde, müſſe er ihm 4 Gulden zur Strafe bezahlen. Nach 72 Tagen hat der Jüngling das ihm vorgelegte erlernet, und begehrt dafür den verſprochenen Lohn: der Vater hält die Tage, die er gearbeitet, gegen denen, die er im Müßiggange hat verſtreichen laſſen, und zeigt ihm, daß er ihm gar nichts ſchuldig ſey, und auch nichts von ihm zu fordern habe. Nun fragt man: wie viele Ta-

ge

ge er ſtudirt, und wie viele er mit Müßiggange zugebracht habe?

Man wird alſo folgern:

Die Tage der Arbeit ſollen heißen : x

Die Tage des Müßiggangs werden alſo heißen : : : $72 - x$

Für einen Tag der Arbeit hat er 5 Gulden zu fordern. Man muß alſo die Tage der Arbeit durch 5 multipliciren, damit man jene Summe erhalte, die er von dem Vater für ſeine Arbeit zu fordern hat. Dieſe Summe iſt alſo : : $5x$

Für einen Tag des Müßiggangs muß er 4 Gulden Strafe bezahlen. Man muß alſo $72 - x$ die Tage des Müßiggangs mit 4 multipliciren, ſo bekommt man die Summe, die er dem Vater zurück zu bezahlen ſchuldig iſt. Dieſe iſt alſo : : $72 - x \times 4$ oder $288 - 4x$

Nun aber iſt weder der Vater dem Sohne, noch der Sohn dem Vater etwas ſchuldig. Der Lohn für die Arbeit muß alſo der Strafe für den Müßiggang gleich ſeyn. Folglich iſt $5x = 288 - 4x$

Die Auflöſung giebt : : $x = 32$ die Tage der Arbeit.

Dieſes von 72 abgezogen giebt : 40
die Tage des Müßiggangs.

Und in der That 32 Tage der Arbeit, jeden für 5 Gulden angeſchlagen, verdienen 160 Gulden: 40 Tage des Müßiggangs jeden zu 4 Gulden Strafe gerechnet, machen abermal 160 Gulden: die Strafe hebt alſo die Belohnung auf, der Sohn hat vom Vater, und dieſer vom Sohne nichts zu fodern.

5) Ein Hauptmann hat mit ſeinem untergebenen Kommando eine Beute erobert: er will ſie unter ſeine Soldaten austheilen. Wenn er jedem 5 Gulden geben wollte, ſo erkleckt die Beute nicht, es gehen ihm 300 Gulden ab. Giebt er aber jedem nur 4 Gulden, ſo bleiben ihm 200 Gulden übrig. Wieviel waren es Soldaten, und wie groß die Beute?

Man folgere alſo:

Die Anzahl der Soldaten ſey : : x

Wenn er jedem 5 Gulden gäbe, ſo würde ſich die ganze Ausgabe auf ſo vielmal 5 Gulden belaufen, als viele Soldaten ſind, nämlich auf 5 x. Nun aber iſt die Beute um 300 Gulden zu klein. Die Beute iſt alſo : : $5x - 300$

Giebt

Giebt er jedem Soldaten nur 4 Gulden, ſo beläuft ſich die Aufgabe auf $4x$: es bleiben ihm aber alsdenn 200 Gulden von der Beute über. Die ganze Beute iſt alſo : : : : $5x - 200$

Weil nun der erſte Ausdruck $4x + 200$ die Beute ausdrückt, und der zweyte Ausdruck $4x + 200$ eben dieſe Beute anzeigt, ſo müſſen dieſe zween Ausdrücke einander gleich ſeyn. Man hat alſo dieſe Gleichung : $5x - 300 = 4x + 200$

Die Auflöſung giebt : : $x = 500$

Es waren alſo 500 Soldaten. Multiplicirt man dieſe mit 5, ſo iſt das Produkt 2500, zieht man 300 davon ab, ſo iſt der Reſt 2200 Gulden die Größe der Beute. Multiplicirt man gemäß der zweyten Bedingniß die Anzahl x der Soldaten mit 4, ſo iſt das Produkt 2000: addirt man 200 dazu, ſo iſt die Summe 2200 Gulden abermal die Größe der Beute. Und weil dieſe beyderſeits gefundene Summe die nämliche iſt, ſo erkennt man, daß die Auflöſung richtig ſey.

Erſte Anmerkung. In dieſem Exempel ſieht man, daß es zuweilen, um eine Gleichung zu finden, nothwendig iſt, die nämliche Sache auf zweyerley Arten auszudrücken, welche zween Ausdrücke der nämlichen Sache alsdenn einander nothwendig gleich ſeyn müſ-

ſen. Alſo hat man in gegenwärtigen Exempel zween Ausdrücke der Beute geſucht: und dieſe beyden alsdenn mit einander verglichen.

Zweyte Anmerkung. Wenn man in gegenwärtiger Aufgabe, anſtatt der bekannten Größen Buchſtaben des Alphabets, etwa *a* anſtatt 5, *b* anſtatt 4, *p* anſtatt 300, *q* anſtatt 200 geſetzt hätte; ſo würde die Gleichung alſo geſtanden ſeyn : $ax - p = bx + q$.

Die Auflöſung hätte gegeben $x = \frac{p+q}{a-b}$

Nun dieſe mit Buchſtaben gemachte Auflöſung wäre allgemein, und würde immer dienen, man möchte die in der Aufgabe gegebenen Zahlen ändern, wie man wollte. Ja, man kann aus dieſer allgemeinen Auflöſung eine allgemeine Regel für die Beantwortung aller dergleichen Fragen herleiten. Die Regel würde dieſe ſeyn. Die Anzahl derer, unter welche die Austheilung geſchehen muß, iſt allezeit gleich der Summe aus dem Abgange bey der erſten, uud aus dem Ueberſchuſſe bey der zweyten Austheilung, dividire man durch die Differenz zwiſchen den Zahlen, welche in beyden Theilungen für einen jeden beſtimmt ſind. Und wenn alſo dieſe Differenz 1 iſt, ſo iſt die Anzahl, unter welche die Austheilung geſchehen muß, gleich der beſagten Summe.

7) Ein

6) Ein Waſſerbehältniß faßt 800 (a) Eymer. Aus dreyen Röhren fließt Waſſer darein. Das erſte, wenn es allein laufen ſollte, würde in 3 (b) Tagen das Behältniß anfüllen: das zweyte in 4 (c) Tagen: das dritte in 6 (d) Tagen. Wie bald wird das Behältniß voll ſeyn, wenn alle drey zugleich laufen?

Man nenne die Zahl, die man ſucht x

Nun folgere man alſo. Das erſte Rohr giebt in b Tagen das Waſſer a: wieviel giebt es in der Zeit x? Man findet nach der Regel der Proportion : : $\frac{ax}{b}$.

Das zweyte Rohr giebt in der Zeit c das Waſſer a: was giebt es in der Zeit x? Man findet : : : $\frac{ax}{c}$.

Das dritte Rohr giebt in der Zeit d das Waſſer a, was giebt es in der Zeit x? Man findet : : : : $\frac{ax}{d}$

Nun muß das Waſſer, welches in der Zeit x aus allen dreyen Rohren zugleich fließt, das Behältniß anfüllen, und alſo die Eymer a ausmachen. Man hat alſo dieſe Gleichung : $\frac{ax}{b} + \frac{ax}{c} + \frac{ax}{d} = a$

 Die

Die Auflöſung giebt

$$x = \frac{abcd}{acd + abd + abc} = \frac{bcd}{cd + bd + bc} = \frac{3 \times 4 \times 6}{24 + 18 + 12}$$

$$= \frac{72}{54} = 1\tfrac{1}{3}.$$

7) Als einer gefragt wurde, wieviel es auf der Uhr wäre, antwortete er: der Stundenzeiger ſtehe zwiſchen 4 und 5 Uhr, der Minutenzeiger aber ſtehe genau ober dem Stundenzeiger. Wie viele Minuten war es über 4 Uhr?

Man nenne die Anzahl dieſer Minuten x und folgere alſo: Da es genau 4 Uhr war, gieng der Stundenzeiger von der vierten, der Minutenzeiger von der zwölften Stunde weg. Nun iſt es klar, daß der Minutenzeiger, bis er den Stundenzeiger erreicht, den Raum, welcher zwiſchen der zwölften und vierten Stunde liegt, durchlaufen muß, und noch überdas jenen Raum, welchen der Stundenzeiger in der Zeit x durchlauft. Wenn man den Raum, der zwiſchen der zwölften und vierten Stunde liegt, in dem in Minuten eingetheilten Cirkel nimmt, ſo ſind es 20 (a) Minuten. Innerhalb 60 Minuten der Zeit durchlauft der Stundenzeiger 5 Minuten eben deſſelben Cirkels: wieviel durchlauft er alſo in der Zeit x? Man findet $\frac{5x}{60}$ oder $\frac{x}{12}$: $a + \frac{x}{12}$

iſt

iſt alſo der ganze Raum, den der Minutenzeiger zu durchlaufen hat, bis er den Stundenzeiger erreicht.

Ferner iſt bekannt, daß der Minutenzeiger in 60 Minuten der Zeit 60 Minuten ſeines Cirkels durchlauft: wieviel durchlauft er alſo in der Zeit x? Man findet x. Eben dieſes x iſt alſo abermal der Raum, den der Minutenzeiger durchlaufen muß, bis er den Stundenzeiger erreicht. Man hat alſo dieſe Gleichung $a + \frac{x}{12} = x$

und folglich $x = \frac{12a}{11} = \frac{140}{11} = 21\frac{9}{11}$.

Es war alſo 21 Minuten und $\frac{9}{11}$ einer Minute über vier Uhr.

Weil die ganze Rechnung vollkommen die nämliche bleibt, für was immer für eine Stunde, ſo kann man gar leicht finden, um was für eine Minute, nach was immer für einer Stunde der Stundenzeiger den Minutenzeiger erreiche. Man darf nur in der gefundenen Formel anſtatt a die gehörige Anzahl der Minuten ſetzen.

8) Ein Vater ſagte zu ſeinem Sohne; das Geld, das ich in meiner Hand verſchloſſen halte, ſoll dein ſeyn, wenn du mir durch

die

die Rechnung beſtimmeſt, wieviel es Kreuzer ſind, Nun merke: Wenn du die Zahl der Kreuzer, die ich halte, halb nimmſt, und über das den dritten und den ſiebenten Theil derſelben, ſo kommt eine Summe heraus, die um 1 kleiner iſt, als die Zahl der Kreuzer, die in meiner Hand ſind.

Die Zahl der Kreuzer ſey : : x

Die Hälfte wird : : : $\frac{x}{2}$

Der dritte Theil : : : $\frac{x}{3}$

Der ſiebente : : : : $\frac{x}{7}$

Nun dieſe drey Brüche zuſammen, müſſen der Zahl x gleich ſeyn weniger 1. Man hat alſo dieſe Gleichung:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{7}=x-1.$$

Alſo iſt $x=42$ die Anzahl der Kreuzer.

9) Einige Studenten gehen in ein Wirthshaus, und laſſen ſich wohl auftragen. Die Zeche macht 3 Gulden und 12 Groſchen, oder 72 Groſchen. Zween werden von den übrigen zechfrey gehalten. Nun

Nun muß ein jeder um 3 Groſchen mehr bezahlen, als er hätte zahlen müſſen, wenn alle an der Zeche gleich Theil genommen hätten. Wieviel waren es Studenten? Was mußte einer bezahlen?

Die Zahl der Studenten ſey : : : x

Die Zahl derer, die bezahlen, wird ſeyn : : : : : : : : : $x-2$

Wenn alle bezahlt hätten, ſo hätte Einen getroffen : : : : : : : $\frac{72}{x}$

Nun aber trifft jeden : : : : $\frac{72}{x-2}$

Dieſes letzte iſt um 3 größer, als das vorgehende; alſo iſt:

$$\frac{72}{x-2} = \frac{72}{x} + 3$$

$$72x = 72x - 144 + 3x^2 - 6x$$
$$3x^2 - 6x = 144$$
$$x^2 - 2x = 48$$
$$x^2 - 2x + 1 = 48 + 1 = 49$$
$$x - 1 = \pm\sqrt{49} = \pm 7$$
$$x = 1 \pm 7 = 8 \text{ oder auch } -6.$$

Es waren alſo 8 Studenten: 6 zahlten die Zeche: es traf alſo einen jeden $\frac{72}{6}$ oder 12

Grvſchrn. Hätten alle acht bezahlt, ſo hätte einen getroffen $\frac{72}{8}$, das iſt, 9 Groſchen. Nun iſt ja 12 um 3 größer als 9; wie es die Aufgabe erfordert. Die negative Wurzel kann man in dieſer Aufgabe nicht brauchen.

10) In dem Jahre 1772 war ein Vater 50 (a), ſein Sohn 21 (b) Jahre alt. Nun fragt man, in was für einem Jahre dieſes laufenden Jahrhunderts wird der Vater eben noch ſo alt, als der Sohn ſeyn?

Die Zahl der Jahre, welche beyde noch leben müſſen, bis der Vater noch ſo alt als der Sohn iſt, nenne man : : : : : x

Wenn dieſe Jahre x verſtrichen ſind, ſo wird der Vater $a+x$ Jahre, der Sohn $b+x$ Jahre alt ſeyn. Nun iſt der Vater alsdenn eben noch ſo alt als der Sohn. Alſo iſt

$$a+x=b+x\times 2=2b-+2x$$
$$2x-x=a-2b$$
$$x=a-2b=50-42=8.$$

Sie müſſen alſo beyde noch acht Jahre leben. Alſo wird im Jahre 1780 der Vater noch ſo alt als der Sohn ſenn. In der That, der Vater wird dazumal 58, der Sohn 29 Jahre haben. Nun aber iſt $58=29\times 2$. Die allgemeine Auflöſung zeigt, daß in all dergleichen Aufgaben das Alter des Sohns

müſſe

müſſe doppelt genommen, und alsdenn von dem Alter des Vaters abgezogen werden. Wenn dieſes doppelte gröſſer wäre, als das Alter des Vaters, ſo würde der Werth von x negativ werden. Welches dann ein Anzeige wäre, daß jene Zeit, da der Vater noch ſo alt als der Sohn war, ſchon verſtrichen ſey, und nicht erſt kommen werde, und zwar um ſo viele Jahre, als der negative Werth von x Einheiten hat. Z. Ex. wenn man ſetzte, der Vater ſey in dem Jahre 1772, 50 Jahre, der Sohn aber 26 Jahre alt geweſen; ſo gäbe die allgemeine Formel $x = a - 2b = 50 - 52 = -2$. Der Vater war alſo zwey Jahre zuvor, nämlich im Jahre 1770 noch ſo alt, als ſein Sohn.

11) Ein Wirth hat zweyerley Wein. Eine Maaß des beſſern verkauft er um 10 (a) Kreuzer: eine Maaß des ſchlechtern um 6 (b) Kreuzer. Er will beyde unter einander miſchen, alſo, daß die Miſchung 2400 (m) Maaße ausmache, und eine Maaß 7 (c) Kreuzer werth ſey. Wieviel muß er von dem beſſern, wieviel von dem ſchlechtern nehmen?

Die Anzahl der Maaßen des beſſern ſey x

Des ſchlechtern : : : : : $m - x$

Eine Maaß des beſſern gilt a Kreuzer: weil alſo x die Anzahl der Maaße dieſes

 Weins

Weins iſt; ſo muß ax den Werth alles beſſern Weins, der in die Miſchung kommt, ausdrücken.

Aus gleicher Urſache muß $bm - bx$ den Werth alles ſchlechtern Weins, der in die Miſchung kömmt, ausdrücken. Folglich iſt der Werth der ganzen Miſchung $ax + bm - bx$.

Nun ſind die Maaße der Miſchung m: der Werth einer Maaß iſt c: alſo iſt cm abermal der Werth der ganzen Miſchung.

Nun ſteht dieſe Gleichung alſo:

$$ax + bm - bx = cm.$$

Die Auflöſung giebt

$$x = \frac{cm - bm}{a - b} = 600$$ Die Anzahl der Maaßen des beſſern Weins.

Von dem ſchlechtern Weine muß genommen werden $m - x$, das iſt, $m \frac{-cm + bm}{a - b}$. Wenn man dieſes unter einen Nenner bringt, ſo hat man $\frac{am - bm - cm + bm}{a - b}$ oder

$$\frac{am - cm}{a - b} = 1800.$$

Erſte Anmerkung. Die allgemeine in Buchſtaben gemachte Auflöſung giebt eine Regel an die Hand, alle dergleichen Aufgaben aufzulöſen. Die Formel für den beſſern Wein war $\frac{cm - bm}{a - b}$ oder $\frac{\overline{c - b} \times m}{a - b}$. Man muß alſo,

um

um die Anzahl der Maaßen des beſſern zu bekommen, die Differenz zwiſchen dem mittlern und geringern Werthe nehmen, ſelbe mit der Anzahl der Maaßen der ganzen Miſchung multipliciren: und dieſes Produkt durch die Differenz der Werthe des beſſern und ſchlechtern dividiren. Die Formel für den ſchlechtern Wein war $\frac{am - cm}{a - b}$ oder $\frac{\overline{a - c} \times m}{a - b}$.

Man muß alſo, um die Anzahl der Maaßen des ſchlechtern zu bekommen, die Differenz zwiſchen dem Werthe des beſſern und des mittlern nehmen; dieſe mit der Anzahl der Maaßen der ganzen Miſchung multipliciren; das Produkt durch die Differenz der Werthe des beſſern und des ſchlechtern dividiren.

Zweyte Anmerkung. Wenn man keine gewiſſe Maaß giebt, welche die ganze Miſchung haben ſoll, ſondern nur fragt, in was für einem Verhältniſſe beyde Dinge müſſen vermiſchet werden, damit eine gewiße Maaß der Miſchung den gegebenen Werth bekomme, ſo können eben die vorigen Formeln dienen. Die Anzahl der Maaßen der beſſern Sache muß ſich zu der Anzahl der Maaßen der ſchlechtern verhalten, wie $\frac{cm - bm}{a - b}$ zu $\frac{am - cm}{a - b}$ und weil in dieſen beyden Ausdrücken der Nenner beyderſeits der nämliche iſt, ſo kann er weggelaſſen werden, ohne hiedurch das Verhältniß

hältniß zu ändern: ja auch der Factor *m*, weil er beyden Ausdrücken gemein iſt, kann ausgelaſſen werden. Die Maaßen des beſſern müſſen ſich alſo verhalten zu den Maaßen des ſchlechtern, wie $c - b$ zu $a - c$.

Dritte Anmerkung. Wenn man unter den Wein anſtatt eines ſchlechtern Weins Waſſer miſchen wollte, könnten eben die oben gefundenen allgemeinen Formeln dienen, allein mit dieſem Unterſchiede, daß b gleich o wäre, und alſo jene Theile, welche das b in ſich haben, wegfielen. Die Formel für den beſſern Wein $\frac{cm - bm}{a - b}$ würde alſo in dieſe verwandelt werden $\frac{cm}{a}$. Die Formel für das Waſſer $\frac{am - cm}{a - b}$ in dieſe $\frac{am - cm}{a}$.

Ende des zweyten und letzten Theils.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

४०८१

१८८

[illegible]

४०८१ = [illegible]

१८०४

hältniß zu ändern: ja auch der Factor m, weil er beyden Ausdrücken gemein iſt, kann ausgelaſſen werden. Die Maaßen des beſſern müſſen ſich alſo verhalten zu den Maaßen des ſchlechtern, wie $c - b$ zu $a - c$.

Dritte Anmerkung. Wenn man unter den Wein anſtatt eines ſchlechtern Weins Waſſer miſchen wollte, könnten eben die oben gefundenen allgemeinen Formeln dienen, allein mit dieſem Unterſchiede, daß b gleich o wäre, und alſo jene Theile, welche das b in ſich haben, wegfielen. Die Formel für den beſſern Wein $\frac{cm - bm}{a - b}$ würde alſo in dieſe verwandelt werden $\frac{cm}{a}$. Die Formel für das Waſſer $\frac{am - cm}{a - b}$ in dieſe $\frac{am - cm}{a}$.

Ende des zweyten und letzten Theils.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

weil
aus-
ſſern
des

den
mi-
nen
ſem
alſo
weg-
Bein

delt

ſſer

hältniß zu ändern: ja auch der Factor m, weil er beyden Ausdrücken gemein iſt, kann ausgelaſſen werden. Die Maaßen des beſſern müſſen ſich alſo verhalten zu den Maaßen des ſchlechtern, wie $c - b$ zu $a - c$.

Dritte Anmerkung. Wenn man unter den Wein anſtatt eines ſchlechtern Weins Waſſer miſchen wollte, könnten eben die oben gefundenen allgemeinen Formeln dienen, allein mit dieſem Unterſchiede, daß b gleich o wäre, und alſo jene Theile, welche das b in ſich haben, wegfielen. Die Formel für den beſſern Wein $\frac{cm - bm}{a - b}$ würde alſo in dieſe verwandelt werden $\frac{cm}{a}$. Die Formel für das Waſſer $\frac{am - cm}{a - b}$ in dieſe $\frac{am - cm}{a}$.

Ende des zweyten und letzten Theils.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

hältniß zu ändern: ja auch der Factor m, weil er beyden Ausdrücken gemein iſt, kann ausgelaſſen werden. Die Maaßen des beſſern müſſen ſich alſo verhalten zu den Maaßen des ſchlechtern, wie $c-b$ zu $a-c$.

Dritte Anmerkung. Wenn man unter den Wein anſtatt eines ſchlechtern Weins Waſſer miſchen wollte, könnten eben die oben gefundenen allgemeinen Formeln dienen, allein mit dieſem Unterſchiede, daß b gleich o wäre, und alſo jene Theile, welche das b in ſich haben, wegfielen. Die Formel für den beſſern Wein $\frac{cm-bm}{a-b}$ würde alſo in dieſe verwandelt werden $\frac{cm}{a}$. Die Formel für das Waſſer $\frac{am-cm}{a-b}$ in dieſe $\frac{am-cm}{a}$.

Ende des zweyten und letzten Theils.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

hältniß zu ändern: ja auch der Factor m, weil er beyden Ausdrücken gemein iſt, kann ausgelaſſen werden. Die Maaßen des beſſern müſſen ſich alſo verhalten zu den Maaßen des ſchlechtern, wie $c - b$ zu $a - c$.

Dritte Anmerkung. Wenn man unter den Wein anſtatt eines ſchlechtern Weins Waſſer miſchen wollte, könnten eben die oben gefundenen allgemeinen Formeln dienen, allein mit dieſem Unterſchiede, daß b gleich 0 wäre, und alſo jene Theile, welche das b in ſich haben, wegfielen. Die Formel für den beſſern Wein $\frac{cm - bm}{a - b}$ würde alſo in dieſe verwandelt werden $\frac{cm}{a}$. Die Formel für das Waſſer $\frac{am - cm}{a - b}$ in dieſe $\frac{am - cm}{a}$.

Ende des zweyten und letzten Theils.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

hältniß zu ändern: ja auch der Factor m, weil er beyden Ausdrücken gemein iſt, kann ausgelaſſen werden. Die Maaßen des beſſern müſſen ſich alſo verhalten zu den Maaßen des ſchlechtern, wie $c - b$ zu $a - c$.

Dritte Anmerkung. Wenn man unter den Wein anſtatt eines ſchlechtern Weins Waſſer miſchen wollte, könnten eben die oben gefundenen allgemeinen Formeln dienen, allein mit dieſem Unterſchiede, daß b gleich o wäre, und alſo jene Theile, welche das b in ſich haben, wegfielen. Die Formel für den beſſern Wein $\frac{cm - bm}{a - b}$ würde alſo in dieſe verwandelt werden $\frac{cm}{a}$. Die Formel für das Waſſer $\frac{am - cm}{a - b}$ in dieſe $\frac{am - cm}{a}$.

Ende des zweyten und letzten Theils.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

hältniß zu ändern: ja auch der Factor m, weil er beyden Ausdrücken gemein iſt, kann ausgelaſſen werden. Die Maaßen des beſſern müſſen ſich alſo verhalten zu den Maaßen des ſchlechtern, wie $c - b$ zu $a - c$.

Dritte Anmerkung. Wenn man unter den Wein anſtatt eines ſchlechtern Weins Waſſer miſchen wollte, könnten eben die oben gefundenen allgemeinen Formeln dienen, allein mit dieſem Unterſchiede, daß b gleich o wäre, und alſo jene Theile, welche das b in ſich haben, wegfielen. Die Formel für den beſſern Wein $\frac{cm - bm}{a - b}$ würde alſo in dieſe verwandelt werden $\frac{cm}{a}$. Die Formel für das Waſſer $\frac{am - cm}{a - b}$ in dieſe $\frac{am - cm}{a}$.

Ende des zweyten und letzten Theils.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

hältniß zu ändern: ja auch der Factor m, weil er beyden Ausdrücken gemein iſt, kann ausgelaſſen werden. Die Maaßen des beſſern müſſen ſich alſo verhalten zu den Maaßen des ſchlechtern, wie $c - b$ zu $a - c$.

Dritte Anmerkung. Wenn man unter den Wein anſtatt eines ſchlechtern Weins Waſſer miſchen wollte, könnten eben die oben gefundenen allgemeinen Formeln dienen, allein mit dieſem Unterſchiede, daß b gleich o wäre, und alſo jene Theile, welche das b in ſich haben, wegfielen. Die Formel für den beſſern Wein $\frac{cm - bm}{a - b}$ würde alſo in dieſe verwandelt werden $\frac{cm}{a}$. Die Formel für das Waſſer $\frac{am - cm}{a - b}$ in dieſe $\frac{am - cm}{a}$.

Ende des zweyten und letzten Theils.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

hältniß zu ändern: ja auch der Factor m, weil er beyden Ausdrücken gemein iſt, kann ausgelaſſen werden. Die Maaßen des beſſern müſſen ſich alſo verhalten zu den Maaßen des ſchlechtern, wie $c - b$ zu $a - c$.

Dritte Anmerkung. Wenn man unter den Wein anſtatt eines ſchlechtern Weins Waſſer miſchen wollte, könnten eben die oben gefundenen allgemeinen Formeln dienen, allein mit dieſem Unterſchiede, daß b gleich o wäre, und alſo jene Theile, welche das b in ſich haben, wegfielen. Die Formel für den beſſern Wein $\frac{cm - bm}{a - b}$ würde alſo in dieſe verwandelt werden $\frac{cm}{a}$. Die Formel für das Waſſer $\frac{am - cm}{a - b}$ in dieſe $\frac{am - cm}{a}$.

Ende des zweyten und letzten Theils.

Bayerische Staatsbibliothek München

hältniß zu ändern: ja auch der Factor m, weil er beyden Ausdrücken gemein iſt, kann ausgelaſſen werden. Die Maaßen des beſſern müſſen ſich alſo verhalten zu den Maaßen des ſchlechtern, wie $c - b$ zu $a - c$.

Dritte Anmerkung. Wenn man unter den Wein anſtatt eines ſchlechtern Weins Waſſer miſchen wollte, könnten eben die oben gefundenen allgemeinen Formeln dienen, allein mit dieſem Unterſchiede, daß b gleich o wäre, und alſo jene Theile, welche das b in ſich haben, wegfielen. Die Formel für den beſſern Wein $\frac{cm - bm}{a - b}$ würde alſo in dieſe verwandelt werden $\frac{cm}{a}$. Die Formel für das Waſſer $\frac{am - cm}{a - b}$ in dieſe $\frac{am - cm}{a}$.

Ende des zweyten und letzten Theils.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Alle drey zuſammen müſſen 360 (a) ausmachen: man hat alſo dieſe Gleichung . . . $x+bx+bx=a$

Hieraus entſteht

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{a}{1+b+bc}=10 \text{ die erſte} \\ bx=\dfrac{ab}{1+b+bc}=50 \text{ die zweyte} \\ bcx=\dfrac{abc}{1+b+bc}=300 \text{ die dritte} \end{array}\right\} \text{alles wie zuvor.}$$

4) Ein Student iſt dem Müßiggange ziemlich ergeben. Sein Vater will ihn zum Studieren antreiben, er legt ihm etwas zu erlernen vor, und macht zugleich folgenden Vertrag mit ihm. Für jeden Tag, den er fleißig zum Studieren angewendet haben werde, wolle er ihm 5 Gulden zur Belohnung geben. Für jeden hingegen, den er mit Müßiggehen verzehren würde, müſſe er ihm 4 Gulden zur Strafe bezahlen. Nach 72 Tagen hat der Jüngling das ihm vorgelegte erlernet, und begehrt dafür den verſprochenen Lohn: der Vater hält die Tage, die er gearbeitet, gegen denen, die er im Müßiggange hat verſtreichen laſſen, und zeigt ihm, daß er ihm gar nichts ſchuldig ſey, und auch nichts von ihm zu fordern habe. Nun fragt man: wie viele Tage

ge er ſtudirt, und wie viele er mit Müßiggange zugebracht habe?

Man wird alſo folgern:

Die Tage der Arbeit ſollen heißen : x

Die Tage des Müßiggangs werden alſo heißen : : : $72 - x$

Für einen Tag der Arbeit hat er 5 Gulden zu fordern. Man muß alſo die Tage der Arbeit durch 5 multipliciren, damit man jene Summe erhalte, die er von dem Vater für ſeine Arbeit zu fordern hat. Dieſe Summe iſt alſo : : $5x$

Für einen Tag des Müßiggangs muß er 4 Gulden Strafe bezahlen. Man muß alſo $72 - x$ die Tage des Müßiggangs mit 4 multipliciren, ſo bekommt man die Summe, die er dem Vater zurück zu bezahlen ſchuldig iſt. Dieſe iſt alſo : : $72 - x \times 4$ oder $288 - 4x$

Nun aber iſt weder der Vater dem Sohne, noch der Sohn dem Vater etwas ſchuldig. Der Lohn für die Arbeit muß alſo der Strafe für den Müßiggang gleich ſeyn. Folglich iſt, $5x = 288 - 4x$

Die Auflöſung giebt : : $x = 32$ die Tage der Arbeit.

Dieſes von 72 abgezogen giebt : 40 die Tage des Müßiggangs.

Und in der That 32 Tage der Arbeit, jeden für 5 Gulden angeſchlagen, verdienen 160 Gulden: 40 Tage des Müßiggangs jeden zu 4 Gulden Strafe gerechnet, machen abermal 160 Gulden: die Strafe hebt alſo die Belohnung auf, der Sohn hat vom Vater, und dieſer vom Sohne nichts zu fodern.

5) Ein Hauptmann hat mit ſeinem untergebenen Kommando eine Beute erobert: er will ſie unter ſeine Soldaten austheilen. Wenn er jedem 5 Gulden geben wollte, ſo erkleckt die Beute nicht, es gehen ihm 300 Gulden ab. Giebt er aber jedem nur 4 Gulden, ſo bleiben ihm 200 Gulden übrig. Wieviel waren es Soldaten, und wie groß die Beute?

Man folgere alſo:

Die Anzahl der Soldaten ſey : : x

Wenn er jedem 5 Gulden gäbe, ſo würde ſich die ganze Ausgabe auf ſo vielmal 5 Gulden belaufen, als viele Soldaten ſind, nämlich auf $5\,x$. Nun aber iſt die Beute um 300 Gulden zu klein. Die Beute iſt alſo : : $5\,x - 300$

Giebt

Giebt er jedem Soldaten nur 4 Gulden, ſo beläuft ſich die Aufgabe auf $4x$: es bleiben ihm aber alsdenn 200 Gulden von der Beute über. Die ganze Beute iſt alſo : : : : $5x - 200$

Weil nun der erſte Ausdruck $4x + 200$ die Beute ausdrückt, und der zweyte Ausdruck $4x + 200$ eben dieſe Beute anzeigt, ſo müſſen dieſe zween Ausdrücke einander gleich ſeyn. Man hat alſo dieſe Gleichung : $5x - 300 = 4x + 200$

Die Auflöſung giebt : : $x = 500$

Es waren alſo 500 Soldaten. Multiplicirt man dieſe mit 5, ſo iſt das Produkt 2500, zieht man 300 davon ab, ſo iſt der Reſt 2200 Gulden die Größe der Beute. Multiplicirt man gemäß der zweyten Bedingniß die Anzahl x der Soldaten mit 4, ſo iſt das Produkt 2000: addirt man 200 dazu, ſo iſt die Summe 2200 Gulden abermal die Größe der Beute. Und weil dieſe beyderſeits gefundene Summe die nämliche iſt, ſo erkennt man, daß die Auflöſung richtig ſey.

Erſte Anmerkung. In dieſem Exempel ſieht man, daß es zuweilen, um eine Gleichung zu finden, nothwendig iſt, die nämliche Sache auf zweyerley Arten auszudrücken, welche zween Ausdrücke der nämlichen Sache alsdenn einander nothwendig gleich ſeyn müſ-

 ſen.

ſen. Alſo hat man in gegenwärtigen Exempel zween Ausdrücke der Beute geſucht: und dieſe beyden alsdenn mit einander verglichen.

Zweyte Anmerkung. Wenn man in gegenwärtiger Aufgabe, anſtatt der bekannten Größen Buchſtaben des Alphabets, etwa a anſtatt 5, b anſtatt 4, p anſtatt 300, q anſtatt 200 geſetzt hätte; ſo würde die Gleichung alſo geſtanden ſeyn : $ax - p = bx + q$.

Die Auflöſung hätte gegeben $x = \frac{p+q}{a-b}$

Nun dieſe mit Buchſtaben gemachte Auflöſung wäre allgemein, und würde immer dienen, man möchte die in der Aufgabe gegebenen Zahlen ändern, wie man wollte. Ja, man kann aus dieſer allgemeinen Auflöſung eine allgemeine Regel für die Beantwortung aller dergleichen Fragen herleiten. Die Regel würde dieſe ſeyn. Die Anzahl derer, unter welche die Austheilung geſchehen muß, iſt allezeit gleich der Summe aus dem Abgange bey der erſten, uud aus dem Ueberſchuſſe bey der zweyten Austheilung, dividire man durch die Differenz zwiſchen den Zahlen, welche in beyden Theilungen für einen jeden beſtimmt ſind. Und wenn alſo dieſe Differenz 1 iſt, ſo iſt die Anzahl, unter welche die Austheilung geſchehen muß, gleich der beſagten Summe.

7) Ein

6) Ein Waſſerbehältniß faßt 800 (a) Eymer. Aus dreyen Röhren fließt Waſſer darein. Das erſte, wenn es allein laufen ſollte, würde in 3 (b) Tagen das Behältniß anfüllen: das zweyte in 4 (c) Tagen: das dritte in 6 (d) Tagen. Wie bald wird das Behältniß voll ſeyn, wenn alle drey zugleich laufen?

Man nenne die Zahl, die man ſucht x

Nun folgere man alſo. Das erſte Rohr giebt in b Tagen das Waſſer a: wieviel giebt es in der Zeit x? Man findet nach der Regel der Proportion : : $\frac{ax}{b}$

Das zweyte Rohr giebt in der Zeit c das Waſſer a: was giebt es in der Zeit z? Man findet : : : $\frac{ax}{c}$

Das dritte Rohr giebt in der Zeit d das Baſſer a, was giebt es in der Zeit x? Man findet : : : : $\frac{ax}{d}$

Nun muß das Waſſer, welches in der Zeit x aus allen dreyen Rohren zugleich fließt, das Behältniß anfüllen, und alſo die Eymer a ausmachen. Man hat alſo dieſe Gleichung : $\frac{ax}{b} + \frac{ax}{c} + \frac{ax}{d} = a$

 Die

Die Auflöſung giebt

$$x = \frac{abcd}{acd+abd+abc} = \frac{bcd}{cd+bd+bc} = \frac{3\times4\times6}{24+18+12} = \frac{72}{54} = 1\tfrac{1}{3}.$$

7) Als einer gefragt wurde, wieviel es auf der Uhr wäre, antwortete er: der Stundenzeiger ſtehe zwiſchen 4 und 5 Uhr, der Minutenzeiger aber ſtehe genau ober dem Stundenzeiger. Wie viele Minuten war es über 4 Uhr?

Man nenne die Anzahl dieſer Minuten x und folgere alſo: Da es genau 4 Uhr war, gieng der Stundenzeiger von der vierten, der Minutenzeiger von der zwölften Stunde weg. Nun iſt es klar, daß der Minutenzeiger, bis er den Stundenzeiger erreicht, den Raum, welcher zwiſchen der zwölften und vierten Stunde liegt, durchlaufen muß, und noch überdas jenen Raum, welchen der Stundenzeiger in der Zeit x durchlauft. Wenn man den Raum, der zwiſchen der zwölften und vierten Stunde liegt, in dem in Minuten eingetheilten Cirkel nimmt, ſo ſind es 20 (a) Minuten. Innerhalb 60 Minuten der Zeit durchlauft der Stundenzeiger 5 Minuten eben deſſelben Cirkels: wieviel durchlauft er alſo in der Zeit x? Man findet $\frac{5x}{60}$ oder $\frac{x}{12}$; $a + \frac{x}{12}$ iſt

iſt alſo der ganze Raum, den der Minutenzeiger zu durchlaufen hat, bis er den Stundenzeiger erreicht.

Ferner iſt bekannt, daß der Minutenzeiger in 60 Minuten der Zeit 60 Minuten ſeines Cirkels durchlauft: wieviel durchlauft er alſo in der Zeit x? Man findet x. Eben dieſes x iſt alſo abermal der Raum, den der Minutenzeiger durchlaufen muß, bis er den Stundenzeiger erreicht. Man hat alſo dieſe Gleichung $a + \frac{x}{12} = x$

und folglich $x = \frac{12a}{11} = \frac{140}{11} = 21\frac{9}{11}$.

Es war alſo 21 Minuten und $\frac{9}{11}$ einer Minute über vier Uhr.

Weil die ganze Rechnung vollkommen die nämliche bleibt, für was immer für eine Stunde, ſo kann man gar leicht finden, um was für eine Minute, nach was immer für einer Stunde der Stundenzeiger den Minutenzeiger erreiche. Man darf nur in der gefundenen Formel anſtatt a die gehörige Anzahl der Minuten ſetzen.

8) Ein Vater ſagte zu ſeinem Sohne; das Geld, das ich in meiner Hand verſchloſſen halte, ſoll dein ſeyn, wenn du mir durch

die

die Rechnung beſtimmeſt, wieviel es Kreuzer ſind, Nun merke: Wenn du die Zahl der Kreuzer, die ich halte, halb nimmſt, und über das den dritten und den ſiebenten Theil derſelben, ſo kommt eine Summe heraus, die um 1 kleiner iſt, als die Zahl der Kreuzer, die in meiner Hand ſind.

Die Zahl der Kreuzer ſey : : x

Die Hälfte wird : : : $\frac{x}{2}$

Der dritte Theil : : : $\frac{x}{3}$

Der ſiebente : : : : $\frac{x}{7}$

Nun dieſe drey Brüche zuſammen, müſſen der Zahl x gleich ſeyn weniger 1. Man hat alſo dieſe Gleichung:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{7}=x-1.$$

Alſo iſt $x=42$ die Anzahl der Kreuzer.

9) Einige Studenten gehen in ein Wirthshaus, und laſſen ſich wohl auftragen. Die Zeche macht 3 Gulden und 12 Groſchen, oder 72 Groſchen. Zween werden von den übrigen zechfrey gehalten. Nun

Nun muß ein jeder um 3 Groſchen mehr bezahlen, als er hätte zahlen müſſen, wenn alle an der Zeche gleich Theil genommen hätten. Wieviel waren es Studenten? Was mußte einer bezahlen?

Die Zahl der Studenten ſey : : : x

Die Zahl derer, die bezahlen, wird ſeyn : : : : : : : : : $x-2$

Wenn alle bezahlt hätten, ſo hätte Einen getroffen : : : : : : : $\frac{72}{x}$

Nun aber trifft jeden : : : : $\frac{72}{x-2}$

Dieſes letzte iſt um 3 größer, als das vorgehende; alſo iſt:

$$\frac{72}{x-2}=\frac{72}{x}+3$$

$$72x=72x-144+3x^2-6x$$
$$3x^2-6x=144$$
$$x^2-2x=48$$
$$x^2-2x+1=48+1=49$$
$$x-1=\pm\sqrt{49}=\pm 7$$
$$x=1\pm 7=8 \text{ oder auch } -6.$$

Es waren alſo 8 Studenten: 6 zahlten die Zeche: es traf alſo einen jeden $\frac{72}{6}$ oder 12

Groſchen. Hätten alle acht bezahlt, ſo hätte einen getroffen $\frac{72}{8}$, das iſt, 9 Groſchen. Nun iſt ja 12 um 3 größer als 9; wie es die Aufgabe erfordert. Die negative Wurzel kann man in dieſer Aufgabe nicht brauchen.

10) In dem Jahre 1772 war ein Vater 50 (*a*), ſein Sohn 21 (*b*) Jahre alt. Nun fragt man, in was für einem Jahre dieſes laufenden Jahrhunderts wird der Vater eben noch ſo alt, als der Sohn ſeyn?

Die Zahl der Jahre, welche beyde noch leben müſſen, bis der Vater noch ſo alt als der Sohn iſt, nenne man : : : : : x

Wenn dieſe Jahre x verſtrichen ſind, ſo wird der Vater $a+x$ Jahre, der Sohn $b+x$ Jahre alt ſeyn. Nun iſt der Vater alsdenn eben noch ſo alt als der Sohn. Alſo iſt

$$a+x=b+x\times 2=2b+2x$$
$$2x-x=a-2b$$
$$x=a-2b=50-42=8.$$

Sie müſſen alſo beyde noch acht Jahre leben. Alſo wird im Jahre 1780 der Vater noch ſo alt als der Sohn ſeyn. In der That, der Vater wird dazumal 58, der Sohn 29 Jahre haben. Nun aber iſt $58=29\times 2$. Die allgemeine Auflöſung zeigt, daß in all dergleichen Aufgaben das Alter des Sohns

müſſe doppelt genommen, und alsdenn von dem Alter des Vaters abgezogen werden. Wenn dieſes doppelte größer wäre, als das Alter des Vaters, ſo würde der Werth von x negativ werden. Welches dann ein Anzeige wäre, daß jene Zeit, da der Vater noch ſo alt als der Sohn war, ſchon verſtrichen ſey, und nicht erſt kommen werde, und zwar um ſo viele Jahre, als der negative Werth von x Einheiten hat. Z. Ex. wenn man ſetzte, der Vater ſey in dem Jahre 1772, 50 Jahre, der Sohn aber 26 Jahre alt geweſen; ſo gäbe die allgemeine Formel $x = a - 2b = 50 - 52 = -2$. Der Vater war alſo zwey Jahre zuvor, nämlich im Jahre 1770 noch ſo alt, als ſein Sohn.

11) Ein Wirth hat zweyerley Wein. Eine Maaß des beſſern verkauft er um 10 (a) Kreuzer: eine Maaß des ſchlechtern um 6 (b) Kreuzer. Er will beyde unter einander miſchen, alſo, daß die Miſchung 2400 (m) Maaße ausmache, und eine Maaß 7 (c) Kreuzer werth ſey. Wieviel muß er von dem beſſern, wieviel von dem ſchlechtern nehmen?

Die Anzahl der Maaßen des beſſern ſey x

Des ſchlechtern : : : : : $m - x$

Eine Maaß des beſſern gilt a Kreuzer: weil alſo x die Anzahl der Maaße dieſes

Weins iſt; ſo muß ax den Werth alles beſſern Weins, der in die Miſchung kommt, ausdrücken.

Aus gleicher Urſache muß $bm - bx$ den Werth alles ſchlechtern Weins, der in die Miſchung kömmt, ausdrücken. Folglich iſt der Werth der ganzen Miſchung $ax + bm - bx$.

Nun ſind die Maaße der Miſchung m: der Werth einer Maaß iſt c: alſo iſt cm abermal der Werth der ganzen Miſchung.

Nun ſteht dieſe Gleichung alſo:

$$ax + bm - bx = cm.$$

Die Auflöſung giebt

$$x = \frac{cm - bm}{a - b} = 600$$ Die Anzahl der Maaßen des beſſern Weins.

Von dem ſchlechtern Weine muß genommen werden $m - x$, das iſt, $m \frac{-cm + bm}{a - b.}$

Wenn man dieſes unter einen Nenner bringt, ſo hat man $\frac{am - bm - cm + bm}{a - b}$ oder

$$\frac{am - cm}{a - b} = 1800.$$

Erſte Anmerkung. Die allgemeine in Buchſtaben gemachte Auflöſung giebt eine Regel an die Hand, alle dergleichen Aufgaben aufzulöſen. Die Formel für den beſſern Wein war $\frac{cm - bm}{a - b}$ oder $\frac{\overline{c - b} \times m}{a - b}$. Man muß alſo,

um

um die Anzahl der Maaßen des beſſern zu bekommen, die Differenz zwiſchen dem mittlern und geringern Werthe nehmen, ſelbe mit der Anzahl der Maaßen der ganzen Miſchung multipliciren: und dieſes Produkt durch die Differenz der Werthe des beſſern und ſchlechtern dividiren. Die Formel für den ſchlechtern Wein war $\frac{am - cm}{a - b}$ oder $\frac{\overline{a - c} \times m}{a - b}$.

Man muß alſo, um die Anzahl der Maaßen des ſchlechtern zu bekommen, die Differenz zwiſchen dem Werthe des beſſern und des mittlern nehmen; dieſe mit der Anzahl der Maaßen der ganzen Miſchung multipliciren; das Produkt durch die Differenz der Werthe des beſſern und des ſchlechtern dividiren.

Zweyte Anmerkung. Wenn man keine gewiſſe Maaß giebt, welche die ganze Miſchung haben ſoll, ſondern nur fragt, in was für einem Verhältniſſe beyde Dinge müſſen vermiſchet werden, damit eine gewiße Maaß der Miſchung den gegebenen Werth bekomme, ſo können eben die vorigen Formeln dienen. Die Anzahl der Maaßen der beſſern Sache muß ſich zu der Anzahl der Maaßen der ſchlechtern verhalten, wie $\frac{cm - bm}{a - b}$ zu $\frac{am - cm}{a - b}$ und weil in dieſen beyden Ausdrücken der Nenner beyderſeits der nämliche iſt, ſo kann er weggelaſſen werden, ohne hiedurch das Verhältniß

hältniß zu ändern: ja auch der Factor m, weil er beyden Ausdrücken gemein iſt, kann ausgelaſſen werden. Die Maaßen des beſſern müſſen ſich alſo verhalten zu den Maaßen des ſchlechtern, wie $c-b$ zu $a-c$.

Dritte Anmerkung. Wenn man unter den Wein anſtatt eines ſchlechtern Weins Waſſer miſchen wollte, könnten eben die oben gefundenen allgemeinen Formeln dienen, allein mit dieſem Unterſchiede, daß b gleich o wäre, und alſo jene Theile, welche das b in ſich haben, wegfielen. Die Formel für den beſſern Wein $\frac{cm-bm}{a-b}$ würde alſo in dieſe verwandelt werden $\frac{cm}{a}$. Die Formel für das Waſſer $\frac{am-cm}{a-b}$ in dieſe $\frac{am-cm}{a}$.

Ende des zweyten und letzten Theils.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

8081

188

6484
878

8081 = 14 6105484
1804
65294
646484
-060

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Spengler, Joseph

Joseph Spenglers weiland öffentl. Lehrers der Mathematik auf der hohen Schule zu Dillingen Erste Gründe der Arithmetik und Algebra

Augsburg 1803

BHS II K 28

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10708116-5